

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE EDUCACIÓN
SUPERIOR DE ENSENADA.**

DIVISIÓN DE CIENCIAS DE LA TIERRA
DEPARTAMENTO DE SISMOLOGÍA

DIFERENCIAS FINITAS EXACTAS: UN ESTUDIO PEDAGÓGICO

TESIS

Que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de MAESTRO
EN CIENCIAS presenta:

SELENE SOLORZA CALDERÓN

Ensenada, Baja California, México. Octubre de 1999.

RESUMEN de la Tesis de **Selene Solorza Calderón**, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de **MAESTRO EN CIENCIAS** en **CIENCIAS DE LA TIERRA** con especialidad en **SISMOLOGÍA**. Ensenada, Baja California, México. Octubre de 1999.

DIFERENCIAS FINITAS EXACTAS: UN ESTUDIO PEDAGÓGICO

Resumen aprobado por:

Dr. Pratap N. Sahay Sahay
Director de tesis

Los esquemas de diferencias finitas han llegado a ser uno de los métodos más utilizados en la simulación numérica de problemas tanto sencillos como complejos. Esto es debido a la gran capacidad operacional de las computadoras modernas y a la simplicidad de esta metodología, que reemplaza en la ecuación diferencial cada uno de los términos diferenciales por sus respectivas representaciones discretas, suponiendo que hay equivalencia entre las mismas. Sin embargo, para asegurar que la solución discreta sea exactamente igual a la solución continua se debe escoger un intervalo de espaciamento infinitesimalmente pequeño, haciendo que esta metodología no sea la más económica, además de que los esquemas deben satisfacer el criterio de convergencia y de estabilidad.

Por lo que es natural preguntarse, ¿dado algún intervalo de espaciamento, es posible construir un esquema de diferencias finitas en el cual la solución sobre los puntos de la malla sea igual a la de la solución continua? En esta tesis se muestra que es posible construir tales esquemas utilizando la expansión de Taylor de la función en su entidad completa. Aquí, se utiliza la ecuación diferencial y las relaciones derivadas de la misma para remover los términos diferenciales en la expansión de Taylor, para de esta forma obtener una ecuación algebraica que solamente involucre los valores de la función sobre los puntos de la malla. Entonces, el término de truncamiento de la expansión de Taylor, el cual no es considerado en la metodología de diferencias finitas tradicionales, se incorpora de manera natural y así construimos un esquema de diferencias finitas exacto.

Palabras claves: Diferencias Finitas Tradicionales, Diferencias Finitas Exactas, Expansión de Taylor.

ABSTRACT of the thesis of **Selene Solorza Calderón**, submitted to the Division of Post graduate Studies in partial fulfillment of the requirement for the degree of **MASTER IN SCIENCE** in **EARTH SCIENCE** with speciality in **SEISMOLOGY**. Ensenada, Baja California, México. October 1999.

EXACT FINITE DIFFERENCE SCHEME: A PEDAGOGIC STUDY

ABSTRACT

The finite difference algorithm is one of the most used methodology for numerical simulation from simple to complex differential equations. The method involves a mere replacement of the continuous derivatives of the differential equation by difference quotients subjected to convergence and stability criteria. However, if the discrete solution is desired to be exactly the same as the true solution, it is necessary to choose the step-size infinitesimally small. Thus, this methodology may not be the most economical if precision is required.

It is natural to ask if for any given grid space, is it possible to construct a finite difference algorithm that yields the solution on grid points same as the continuous solution? We show that such exact scheme is possible by utilizing the Taylor expansion of the function in its complete entity. Here, the differential equation and its related identities are used to remove the derivative terms of the Taylor expansion to obtain an algebraic equation that involves the values of the function at discrete points only. Thus, the remainder term of the Taylor expansion, which is dropped in the traditional finite difference method, is incorporated in a natural way to yield the exact finite difference scheme.

Key words: Traditional Finite Difference, Exact Finite Difference, Taylor Expansion.

Dedicatoria

Dedico este trabajo a mi mamá y a mi mamá.

AGRADECIMIENTOS

Mis más sinceros agradecimientos a:

A mi director de tesis Pratap N. Sahay por el apoyo que siempre me ha brindado.

A los miembros del comité de tesis por su colaboración: Federico Graef, Cecilio J. Rebollar, Mauricio Reyes, Marco Antonio Pérez.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por su apoyo de manutención y colegiatura en el programa de posgrado del CICESE.

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada que me dio una beca para finalizar mi tesis de maestría.

Al técnico José J. Mojarro por su ayuda en el uso de paquetes.

A mis hermanas y amigos.

CONTENIDO

	Página	
I	INTRODUCCIÓN	1
II	LO BÁSICO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS	4
	II.1. Ideas elementales sobre las ecuaciones de diferencias	5
	II.2. Del dominio continuo al discreto	10
	II.2.1. De la derivada continua al esquema de diferencias	10
	II.2.2. De la ecuación diferencial al esquema de diferencias finitas	15
	II.3. El esquema de diferencias finitas en la práctica	16
III	EL ESQUEMA DE DIFERENCIAS FINITAS EXACTAS PARA LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON COEFICIENTES CONSTANTES	33
	III.1. La ecuación primitiva: La EDO de primer orden con coeficiente constante	34
	III.2. El esquema de diferencias finitas exactas para la EDO de orden mayor con coeficientes constantes.	41
	III.2.1. La EDO de segundo orden con coeficientes constantes	41
	III.2.2. La EDO de tercer orden con coeficientes constantes	52
	III.2.3. La EDO de orden mayor con coeficientes constantes	57
	III.3. Bases firmes para el esquema de diferencias finitas exactas para la ecuación primitiva	58

CONTENIDO (Continuación)

	Página	
IV	EL ESQUEMA DE DIFERENCIAS FINITAS EXACTAS PARA LAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES CON COEFICIENTES CONSTANTES EN DOS VARIABLES	60
	IV.1. La ecuación de onda escalar en dos variables	61
	IV.1.1. El esquema de diferencias finitas exactas derivado de la solución general	61
	IV.1.2. Derivación del esquema de diferencias finitas exactas utilizando la expansión de Taylor en su entidad completa	65
V	CONCLUSIONES	68
	REFERENCIAS	70

LISTA DE FIGURAS

Figura		Página
1	La línea continua representa la solución de una ecuación diferencial. Los puntos representan la solución discreta generada por su correspondiente esquema de diferencias finitas. Claramente, si los puntos discretos no están sobre la línea continua como se indica en la figura, entonces el esquema de diferencias finitas debe de ser la representación discreta de alguna otra ecuación diferencial cuya solución se encuentra exactamente sobre esos puntos discretos.	2
2	Comparación del esquema 1 (cruces) y el 3 (asteriscos) de la tabla 2, del esquema 3 (puntos) de la tabla 4 con un tamaño de paso de 0.6 y la solución continua $y(x) = e^{-x} + xe^{-x}$ (línea continua) de la ecuación (36) con $a = 2$, $b = 1$ y las condiciones iniciales (37).	24
3	Porcentaje de error relativo de los esquemas 1 (cruces) y 3 (asteriscos) de la tabla 2, y del esquema 3 (puntos) de la tabla 4 con un tamaño de paso de 0.6, para la ecuación (36) con $a = 2$, $b = 1$ y las condiciones iniciales (37).	25
4	Comparación del esquema 1 (cruces) y el 3 (asteriscos) de la tabla 2, del esquema 3 (puntos) de la tabla 4 con un tamaño de paso de 0.2 y la solución continua $y(x) = e^{-x} + xe^{-x}$ (línea continua) de la ecuación (36) con $a = 2$, $b = 1$ y las condiciones iniciales (37).	26
5	Porcentaje de error relativo de los esquemas 1 (cruces) y 3 (asteriscos) de la tabla 2, y del esquema 3 (puntos) de la tabla 4 con un tamaño de paso de 0.2, para la ecuación (36) con $a = 2$, $b = 1$ y las condiciones iniciales (37).	27
6	Comparación del esquema 1 (cruces) y el 3 (asteriscos) de la tabla 2, del esquema 3 (puntos) de la tabla 4 con un tamaño de paso de 0.6 y la solución continua $y(x) = \frac{3}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-3x}$ (línea continua) de la ecuación (36) con $a = 4$, $b = 3$ y las condiciones iniciales (37).	28

LISTA DE FIGURAS (Continuación)

Figura		Página
7	Porcentaje de error relativo de los esquemas 1 (cruces) y 3 (asteriscos) de la tabla 2, y del esquema 3 (puntos) de la tabla 4 con un tamaño de paso de 0.6, para la ecuación (36) con $a = 4$, $b = 3$ y las condiciones iniciales (37).	29
8	Comparación del esquema 1 (cruces) y el 3 (asteriscos) de la tabla 2, del esquema 3 (puntos) de la tabla 4 con un tamaño de paso de 0.2 y la solución continua $y(x) = \frac{3}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-3x}$ (línea continua) de la ecuación (36) con $a = 4$, $b = 3$ y las condiciones iniciales (37).	30
9	Porcentaje de error relativo de los esquemas 1 (cruces) y 3 (asteriscos) de la tabla 2, y del esquema 3 (puntos) de la tabla 4 con un tamaño de paso de 0.2, para la ecuación (36) con $a = 4$, $b = 3$ y las condiciones iniciales (37).	31
10	Comparación de la solución continua (46) (línea continua) con la solución discreta obtenida del esquema de diferencias finitas exactas (47) [círculos] y del esquema de diferencias finitas adelantadas de orden $O(\Delta x)$ (48) [puntos] con un tamaño de paso de 0.6.	37
11	Porcentaje de error relativo del esquema de diferencias finitas (48) con un tamaño de paso de 0.6.	38
12	Comparación de la solución continua (46) (línea continua) con la solución discreta obtenida del esquema de diferencias finitas exactas (47) [círculos] y del esquema de diferencias finitas adelantadas de orden $O(\Delta x)$ (48) [puntos] con un tamaño de paso de 0.2.	39
13	Porcentaje de error relativo del esquema de diferencias finitas (48) con un tamaño de paso de 0.2.	40
14	Comparación del esquema de diferencias finitas (55) [círculos] y del esquema de diferencias centradas 3 de la tabla 4 (puntos) con un tamaño de paso de 0.6, y la solución continua $y(x) = e^{-x} + xe^{-x}$ (línea continua) de la ecuación (50) con $a = 2$, $b = 1$ y las condiciones iniciales (37).	44

LISTA DE FIGURAS (Continuación)

Figura		Página
15	Porcentaje de error relativo del esquema de diferencias finitas 3 de la tabla 4 con un tamaño de paso de 0.6, para la ecuación (50) con $a = 2$, $b = 1$ y las condiciones iniciales (37).	45
16	Comparación del esquema de diferencias finitas (55) [círculos] y del esquema de diferencias centradas 3 de la tabla 4 (puntos) con un tamaño de paso de 0.2, y la solución continua $y(x) = e^{-x} + xe^{-x}$ (línea continua) de la ecuación (50) con $a = 2$, $b = 1$ y las condiciones iniciales (37).	46
17	Porcentaje de error relativo del esquema de diferencias finitas 3 de la tabla 4 con un tamaño de paso de 0.2, para la ecuación (50) con $a = 2$, $b = 1$ y las condiciones iniciales (37).	47
18	Comparación del esquema de diferencias finitas (55) [círculos] y del esquema de diferencias centradas 3 de la tabla 4 (puntos) con un tamaño de paso de 0.6, y la solución continua $y(x) = \frac{3}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-3x}$ (línea continua) de la ecuación (50) $a = 4$, $b = 3$ y las condiciones iniciales (37).	48
19	Porcentaje de error relativo del esquema de diferencias finitas 3 de la tabla 4 con un tamaño de paso de 0.6, para la ecuación (50) con $a = 4$, $b = 3$ y las condiciones iniciales (37).	49
20	Comparación del esquema de diferencias finitas (55) [círculos] y del esquema de diferencias centradas 3 de la tabla 4 (puntos) con un tamaño de paso de 0.2, y la solución continua $y(x) = \frac{3}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-3x}$ (línea continua) de la ecuación (50) $a = 4$, $b = 3$ y las condiciones iniciales (37).	50
21	Porcentaje de error relativo del esquema de diferencias finitas 3 de la tabla 4 con un tamaño de paso de 0.2, para la ecuación (50) con $a = 4$, $b = 3$ y las condiciones iniciales (37).	51

LISTA DE FIGURAS (Continuación)

Figura		Página
22	<p>Comparación del esquema de diferencias finitas exactas (57) [círculos] y el esquema de diferencias centradas de orden $O(\Delta x^2)$ (puntos) con un tamaño de paso de 0.2, y la solución continua $y(x) = -\frac{1}{5}e^{3x} + \frac{1}{5}e^{-2x} + e^x$ (línea continua) de la ecuación (56) con $a = -2, b = -5, c = 6$ y las condiciones iniciales $y(0) = 1, \frac{dy}{dx}\Big _{x=0} = 0, \frac{d^2y}{dx^2}\Big _{x=0} = 0$.</p>	53
23	<p>Porcentaje de error relativo del esquema de diferencias finitas centradas de orden $O(\Delta x^2)$ con un tamaño de paso de 0.2 para la ecuación (56) con $a = -2, b = -5, c = 6$ y las condiciones iniciales $y(0) = 1, \frac{dy}{dx}\Big _{x=0} = 0, \frac{d^2y}{dx^2}\Big _{x=0} = 0$.</p>	54
24	<p>Comparación del esquema de diferencias finitas exactas (57) [círculos] y el esquema de diferencias centradas de orden $O(\Delta x^2)$ (puntos) con un tamaño de paso de 0.1, y la solución continua $y(x) = -\frac{1}{5}e^{3x} + \frac{1}{5}e^{-2x} + e^x$ (línea continua) de la ecuación (56) con $a = -2, b = -5, c = 6$ y las condiciones iniciales $y(0) = 1, \frac{dy}{dx}\Big _{x=0} = 0, \frac{d^2y}{dx^2}\Big _{x=0} = 0$.</p>	55
25	<p>Porcentaje de error relativo del esquema de diferencias finitas centradas de orden $O(\Delta x^2)$ con un tamaño de paso de 0.2 para la ecuación (56) con $a = -2, b = -5, c = 6$ y las condiciones iniciales $y(0) = 1, \frac{dy}{dx}\Big _{x=0} = 0, \frac{d^2y}{dx^2}\Big _{x=0} = 0$.</p>	56

LISTA DE TABLAS

Tabla		Página
I	Esquema del proceso de diferencias.	8
II	Algunos esquemas de diferencias finitas para la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes constantes.	17
III	Algunos esquemas de diferencias finitas para la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes constantes.	18
IV	Algunos esquemas de diferencias finitas para la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes constantes.	19
V	Algunos esquemas de diferencias finitas para la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes constantes.	20
VI	Algunos esquemas de diferencias finitas para la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes constantes.	21

DIFERENCIAS FINITAS EXACTAS: UN ESTUDIO PEDAGÓGICO

I. INTRODUCCIÓN

Las diferencias finitas son una metodología que nos permite encontrar la solución numérica de las ecuaciones diferenciales. En ésta metodología uno busca la solución en puntos discretos (puntos de la malla) mediante un algoritmo de recurrencia que supone la equivalencia entre las derivadas continuas y los esquemas de diferencias. Aún cuando la simplicidad de ésta metodología la hace aplicable a cualquier problema que involucre ecuaciones diferenciales, la esencia de la metodología (el reemplazar las derivadas continuas por sus respectivos esquemas de diferencias) que es de aproximación, no reproduce en el dominio discreto la misma solución que la del dominio continuo. Para propósitos prácticos, al escoger el intervalo de espaciamiento infinitesimalmente pequeño la solución discreta podría acercarse a la solución continua. Obviamente, si se desea que la solución discreta sea la misma que la solución continua, esta metodología puede no ser la más económica. Por lo tanto, es natural preguntarse si para algún intervalo de espaciamiento dado ¿es posible construir un esquema de diferencias finitas cuya solución reproduzca la solución continua? Tales esquemas serían más económicos desde el punto de vista computacional. A esta clase de esquemas de diferencias finitas los llamaremos “*exactos*” puesto que generan una correspondencia uno a uno entre la solución del dominio discreto y la solución del dominio continuo (figura 1). El objetivo de esta tesis es realizar un estudio pedagógico de los esquemas de diferencias finitas exactas.

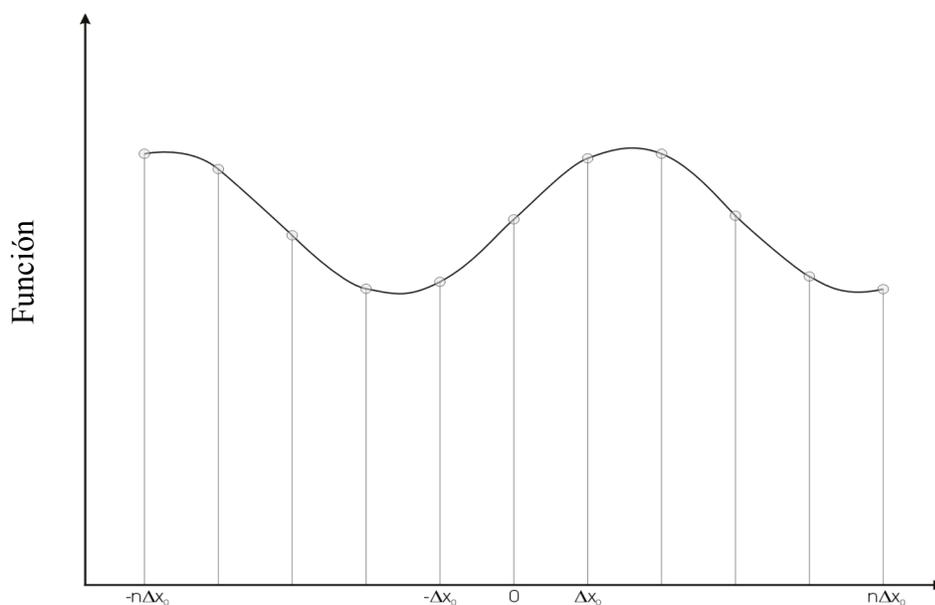


Figura 1: La línea continua representa la solución de una ecuación diferencial. Los puntos representan la solución discreta generada por su correspondiente esquema de diferencias finitas. Claramente, si los puntos discretos no están sobre la línea continua como se indica en la figura, entonces el esquema de diferencias finitas debe de ser la representación discreta de alguna otra ecuación diferencial cuya solución se encuentra exactamente sobre esos puntos discretos.

Mi inducción al estudio de las diferencias finitas comenzó con el intento de desarrollar un esquema de recurrencia para los campos de la onda sísmica desde el marco teórico de la poroelasticidad. Desde principios de los setenta ha habido una intensa actividad en la simulación de los campos de la onda sísmica desde el marco teórico de la elasticidad. Un buen libro que cubre los desarrollos realizados en esta área hasta finales de los ochenta es el volumen 13 de la Society of Exploration Geophysicists Reprints (Kelly y Marfurt, 1990). Algunos adelantos notables de los noventa han aparecido en la literatura geofísica (por

ejemplo: Vafidis *et al.*, 1992; Graves, 1996 y Robertson, 1996). Pero, a pesar de la gran cantidad de trabajo realizado para validar la metodología de las diferencias finitas, aún sigue siendo un problema abierto (Wild y Singh, 1998). La multitud de refinamientos que se tienen que llevar a cabo (en la configuración de la malla y del espacio, y en el algoritmo de recurrencia) para obtener un esquema significativo es lo que ha llevado a algunos autores a decir “la metodología de las diferencias finitas es un arte más que una ciencia” (Ozdenvar y McMechan, 1996). Obviamente la metodología de las diferencias finitas para la elasticidad no está asentada sobre bases firmes, por lo que, su sola extensión al caso poroelástico puede carecer de significado. Por esta razón, en esta tesis se estudian las causas que hacen que las diferencias finitas sean un arte, y se intentará encontrar la forma de que esta metodología sea una ciencia.

En el capítulo II se hace un estudio crítico de la metodología de las diferencias finitas tradicionales para mostrar las limitaciones inherentes, causadas por la simple sustitución de las derivadas por sus esquemas de diferencias sin tomar en cuenta la relación existente entre la función y sus derivadas, como lo dicta la ecuación diferencial. En el capítulo III se plantea la metodología para construir los esquemas de diferencias finitas exactas para las ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes. Además, se presentan algunas comparaciones numéricas entre las soluciones obtenidas por los esquemas tradicionales y el esquema exacto. En el capítulo IV se muestra el desarrollo del esquema exacto para la ecuación de onda escalar en dos variables. Y finalmente, en el capítulo V se presentan las conclusiones.

II. LO BÁSICO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS

La cimentación del cálculo está basada en el concepto de que la derivada continua de una función en un punto es el valor límite de la diferencia del punto precedente y dicho punto, entre el intervalo de espaciamiento. Esencialmente, la misma idea pero en sentido inverso (después de ignorar la parte del límite) es el procedimiento que se sigue para obtener el esquema de diferencias finitas de una ecuación diferencial dada. Claramente, puede o no cumplirse la equivalencia de las derivadas continuas y los esquemas de diferencias, esto dependerá de la naturaleza de la solución continua de la ecuación diferencial y del intervalo de espaciamiento elegido. Tomando como base esta idea de equivalencia, uno manipula el intervalo de espaciamiento y la geometría de la malla (y si es necesario el algoritmo de recurrencia) para obtener la solución discreta dentro de un rango de exactitud aceptable. Este material es cubierto en detalle en cualquier libro de texto sobre diferencias finitas (ver por ejemplo: Forsythe y Wasow, 1960; Richtmyer y Morton, 1967; Hildebrand, 1968; Mitchell y Griffiths, 1980). En las tres décadas pasadas, la esencia de la investigación en el área de las diferencias finitas se enfocó en encontrar técnicas para la implementación de la fuente, condiciones de frontera, coeficientes variables, aliasing, fronteras absorbentes, administración de memoria, etc. Las referencias citadas en el capítulo I son un buen material de consulta para dichos temas.

Notemos que una ecuación diferencial establece la relación existente entre la función y sus derivadas. Dicha relación intrínseca puede que no se preserve dentro del dominio discreto,

mediante la simple sustitución de las derivadas continuas por sus esquemas de diferencias. En este capítulo hemos trabajado los conceptos básicos de la metodología de las diferencias finitas (tradicionales) usando ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes para demostrar las limitaciones inherentes a la metodología.

El capítulo está organizado en tres secciones. La primera sección introduce las ideas elementales sobre las ecuaciones de diferencias. La segunda sección presenta la conexión entre las derivadas continuas y su contraparte en el dominio discreto (esquemas de diferencias). En la última sección con la ayuda de ejemplos numéricos se hace una crítica al intervalo de espaciamiento, la estabilidad y convergencia, orden de exactitud, etc. conceptos que nos conducen a una clara comprensión de porque algunas personas, incluyendo a este autor, creen que la metodología de las diferencias finitas (tradicionales) es un arte más que una ciencia.

II.1. Ideas elementales sobre las ecuaciones de diferencias

Consideremos una secuencia de números de la forma

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots \quad (1)$$

tal que exista una relación entre sus elementos de la forma

$$y_{n+r} = f(n, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+r-1}) \quad (2)$$

Este es un ejemplo sencillo de una ecuación de diferencias, y específicamente, la ecuación (2) es una ecuación de diferencias ordinaria de orden r . Para poder calcular la secuencia y obtener unicidad en la solución se requiere además que los r valores sucesivos de y , digamos $y_1, y_2, y_3, \dots, y_r$ estén especificados inicialmente. A tales datos los llamaremos *datos iniciales* (condiciones de frontera) los cuales al usarse en conjunto con la ecuación de diferencias hacen que podamos calcular los valores subsiguientes de y . Obviamente la ecuación (2) es un algoritmo de recurrencia. Al esquema de diferencias $y_{n+1} - y_n$ lo llamamos 1^{era} diferencia adelantada de y_n , y simbólicamente la escribimos como

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n. \quad (3)$$

Es obvio que al símbolo Δ lo podemos ver como un operador actuando sobre y_n y es análogo al operador diferencial D . Cuando este operador actúa sobre la secuencia y_1, y_2, y_3, \dots , genera la 1^{era} secuencia de diferencias $\Delta y_1, \Delta y_2, \Delta y_3, \dots$. Y al aplicar nuevamente el operador Δ sobre la 1^{era} secuencia de diferencias obtenemos la 2^{da} secuencia de diferencias $\Delta^2 y_1, \Delta^2 y_2, \Delta^2 y_3, \dots$, y así sucesivamente. A esta operación la representamos esquemáticamente en la tabla 1. Obviamente, la 2^{da} diferencia adelantada es

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_n &= \Delta \cdot \Delta y_n = \Delta(y_{n+1} - y_n) = \Delta(y_{n+1}) - \Delta(y_n) \\ &= (y_{n+2} - y_{n+1}) - (y_{n+1} - y_n) = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n.\end{aligned}\tag{4}$$

De la misma forma se sigue que la 3^{er} diferencia adelantada es

$$\Delta^3 y_n = \Delta \cdot \Delta^2 y_n = \Delta(y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n) = y_{n+3} - 3y_{n+2} + 3y_{n+1} - y_n\tag{5}$$

y es claro que es posible expresar *la diferencia adelantada de orden r*, $\Delta^r y_n$, en términos de $y_{n+r}, y_{n+r-1}, \dots, y_n$.

Tabla I: Esquema del proceso de diferencias.

y_1			
	Δy_1		
y_2		$\Delta^2 y_1$	
	Δy_2		$\Delta^3 y_1$
y_3		$\Delta^2 y_2$	
	Δy_3		$\Delta^3 y_2$
y_4		$\Delta^2 y_3$	
.	Δy_4		$\Delta^3 y_3$
.	.	$\Delta^2 y_4$	
.	.	.	$\Delta^3 y_4$
.	.	.	.
y_n	.	.	.
.	Δy_n	.	.
.	.	$\Delta^2 y_n$.
.	.	.	$\Delta^3 y_n$
.	.	.	.
.	.	.	.

Re-escribiendo la ecuación (3) obtenemos

$$y_{n+1} = (\Delta + 1)y_n. \quad (6)$$

Introduciendo la notación

$$E \equiv (\Delta + 1)$$

tenemos que

$$y_{n+1} = Ey_n. \quad (7)$$

Al símbolo E lo podemos ver como un *operador de desplazamiento* puesto que representa un desplazamiento sobre el término y_n . Si repetimos esta operación p veces sobre $y(x)$ tenemos que

$$E^p y(x) = y(x + p\Delta x),$$

o, en notación compacta

$$E^p y_n = y_{n+p} \quad (8)$$

donde p es un número entero positivo o negativo. En consecuencia, E^p operando sobre la función en la posición x produce el valor de la posición $x + p\Delta x$. Debemos notar que para $p = 0$, $E^0 = 1$ puesto que $E^0 y(x) = y(x)$. Así que hemos encontrado que el operador de desplazamiento es un vínculo importante en la construcción de esquemas de recurrencia. El libro de Levy y Lessman (1961) es un excelente material de consulta sobre ecuaciones de diferencias.

II.2. Del dominio continuo al discreto

II.2.1. De la derivada continua al esquema de diferencias

Supongamos que tenemos una función continua, $y(x)$, y que existen todas sus derivadas.

Podemos definir el operador de diferencias Δ , sin modificación, como

$$\Delta y(x) = y(x + \Delta x) - y(x) \quad (9)$$

donde Δx es una cantidad real que representa la separación espacial. El uso de la notación estándar para la separación espacial y el operador de diferencias nos ha llevado a usar el mismo símbolo Δ para ambos conceptos, entonces Δ se debe leer apropiadamente de acuerdo al contexto. Comparando las ecuaciones (3) y (9), deducimos

$$y(x) = y_n, \quad (10)$$

$$y(x + \Delta x) = y_{n+1} \quad (11)$$

donde $x = n\Delta x$, y n un entero. Así que, n indica la posición sobre la cual la función continua $y(x)$ se muestrea para generar la secuencia discreta (1) y Δx es el intervalo de muestreo (intervalo de espaciamento).

Puesto que $y(x)$ es una función continua podemos utilizar la expansión de Taylor alrededor del punto $x + \Delta x$ y enlazar el valor de la posición n con el de la posición $n + 1$

$$y(x + \Delta x) = y(x) + \Delta x \frac{dy}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{\Delta x^4}{4!} \frac{d^4 y}{dx^4} + \dots \quad (12)$$

Utilizando las definiciones (10) y (11), y después de reacomodar términos, obtenemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} - \Delta x \left(\frac{1}{2!} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\Delta x}{3!} \frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{\Delta x^2}{4!} \frac{d^4 y}{dx^4} + \dots \right). \quad (13)$$

A la parte subrayada en (13) la podemos ver como el término de corrección que tiende a cero conforme $\Delta x \rightarrow 0$, *i.e.*, la parte de orden uno en Δx o simbólicamente $O(\Delta x)$. Así que, tenemos una fórmula que expresa la derivada continua de primer orden en términos de los puntos sobre la malla

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} + O(\Delta x). \quad (14)$$

Para propósitos computacionales se ignora el término de corrección y de esta forma obtenemos un esquema que trabaja con orden de exactitud uno en Δx . Puesto que la ecuación (14) se construye en base al valor precedente a n , la llamaremos esquema de diferencias Adelantadas de $O(\Delta x)$.

También, podemos construir un esquema discreto para la derivada continua de orden uno en el punto n en base al valor precedente y subsecuente a n , utilizando la expansión de Taylor alrededor de esos puntos. La ecuación queda como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\Delta x} - \Delta x^2 \left(\frac{1}{3!} \frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{\Delta x^2}{5!} \frac{d^5 y}{dx^5} + \dots \right). \quad (15)$$

Obviamente, aquí el término de corrección es $O(\Delta x^2)$. Esta fórmula se conoce como esquema de diferencias Centradas de $O(\Delta x^2)$.

De manera similar podemos construir la representación discreta de la derivada de cualquier orden con el orden de exactitud deseado en términos de los puntos sobre la malla. Por propósitos ilustrativos, enseguida presentamos una lista de algunos esquemas de diferencias para derivadas de varios ordenes.

Para la primera derivada:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2), \quad \text{Esquema Atrasado (16)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y_{n+2} + 4y_{n+1} - 3y_n}{2\Delta x} + O(\Delta x^2), \quad \text{Esquema Adelantado (17)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y_{n+2} + 8y_{n+1} - 8y_{n-1} + y_{n-2}}{12\Delta x} + O(\Delta x^4). \quad \text{Esquema Centrado (18)}$$

Para la segunda derivada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n}{\Delta x^2} + O(\Delta x), \quad \text{Esquema Ad (19)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2y_n - 5y_{n-1} + 4y_{n-2} - y_{n-3}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2), \quad \text{Esquema At (20)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-y_{n+3} + 4y_{n+2} - 5y_{n+1} + 2y_n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2), \quad \text{Esquema Ad (21)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2), \quad \text{Esquema C (22)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-y_{n+2} + 16y_{n+1} - 30y_n + 16y_{n-1} - y_{n-2}}{12\Delta x^2} + O(\Delta x^4). \quad \text{Esquema C (23)}$$

Para la tercera derivada:

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{y_{n+3} - 3y_{n+2} + 3y_{n+1} - y_n}{\Delta x^3} + O(\Delta x), \quad \text{Esquema Ad (24)}$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{5y_n - 18y_{n-1} + 24y_{n-2} - 14y_{n-3} + 3y_{n-4}}{2\Delta x^3} + O(\Delta x^2), \quad \text{Esquema At (25)}$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{-3y_{n+4} + 14y_{n+3} - 24y_{n+2} + 18y_{n+1} - 5y_n}{2\Delta x^3} + O(\Delta x^2), \quad \text{Esquema Ad (26)}$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{y_{n+2} - 2y_{n+1} + 2y_{n-1} - y_{n-2}}{2\Delta x^3} + O(\Delta x^2). \quad \text{Esquema C (27)}$$

Para la cuarta derivada:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{y_{n+4} - 4y_{n+3} + 6y_{n+2} - 4y_{n+1} + y_n}{\Delta x^4} + O(\Delta x), \quad \text{Esquema Ad (28)}$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{3y_n - 14y_{n-1} + 26y_{n-2} - 24y_{n-3} + 11y_{n-4} - 2y_{n-5}}{\Delta x^4} + O(\Delta x^2) \quad \text{Esquema At (29)}$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{-2y_{n+5} + 11y_{n+4} - 24y_{n+3} + 26y_{n+2} - 14y_{n+1} + 3y_n}{\Delta x^4} + O(\Delta x^2) \quad \text{Esquema Ad (30)}$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{y_{n+2} - 4y_{n+1} + 6y_n - 4y_{n-1} - y_{n-2}}{\Delta x^4} + O(\Delta x^2). \quad \text{Esquema C (31)}$$

En el caso de las funciones continuas y diferenciables en varias variables, la representación discreta de una derivada parcial con el orden de exactitud deseado, se lleva a cabo utilizando la expansión de Taylor de manera similar al caso de una sola variable. Enseguida se listan unas cuantas representaciones discretas para el caso de funciones en dos dimensiones:

$$\frac{\partial y(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{y_{k+1}^n - y_k^n}{\Delta x_1} + O(\Delta x_1), \text{ donde } y_k^n \equiv y(k\Delta x_1, n\Delta x_2), \quad \text{Esquema Adelantado (32)}$$

$$\frac{\partial^2 y(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} = \frac{y_{k+1}^n - 2y_k^n + y_{k-1}^n}{\Delta x_1^2} + O(\Delta x_1^2) \quad \text{Esquema Centrado (33)}$$

$$\frac{\partial^2 y(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} = \frac{-y_{k+2}^n + 16y_{k+1}^n - 30y_k^n + 16y_{k-1}^n - y_{k-2}^n}{12\Delta x_1^2} + O(\Delta x_1^4). \quad \text{Esquema Centrado (34)}$$

II.2.2. De la ecuación diferencial al esquema de diferencias finitas

Como se presento en la sección anterior, para construir el esquema de diferencias finitas de una ecuación diferencial se utiliza la equivalencia de la derivada continua y del esquema de diferencias. El proceso para construir un esquema de diferencias finitas consiste en la simple substitución de las derivadas que componen la ecuación diferencial por sus respectivos esquemas de diferencias. Esto lo representaremos simbólicamente como

$$DE = \Delta E + \text{Término de Truncamiento.} \quad (35)$$

Donde DE representa a la ecuación diferencial. Del lado derecho ΔE representa el esquema de diferencias y el segundo término es la parte que comprende la suma de los términos de truncamiento. Entonces, la equivalencia de la derivada continua y del esquema de diferencias dependerá de la precisión en el tamaño de paso (Δx) elegido, por lo que, el esquema de diferencias (ΔE) es capaz de imitar a la ecuación diferencial (DE) si y sólo si, para el tamaño de paso elegido podemos ignorar el término de truncamiento. Y esto lo garantiza la estabilidad y la convergencia, conceptos que se estudiarán en la siguiente sección.

II.3. El esquema de diferencias finitas en la práctica

Con la ayuda de algunos ejemplos numéricos mostraremos como trabaja la metodología de las diferencias finitas tradicionales. Comencemos con la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes constantes,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = 0. \quad (36)$$

Tenemos varias opciones para construir su esquema de diferencias finitas:

Tabla II: Algunos esquemas de diferencias finitas para la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes constantes.

	Representación Discreta de $\frac{d^2 y}{dx^2}$	Representación Discreta de $\frac{dy}{dx}$	Esquema de Diferencias Finitas para $\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = 0$
1	Adelantadas de $O(\Delta x)$	Adelantadas de $O(\Delta x)$	$y_{n+2} = (2 - a\Delta x)y_{n+1} + (a\Delta x - b\Delta x^2 - 1)y_n$
2	Adelantadas de $O(\Delta x)$	Atrasadas de $O(\Delta x^2)$	$y_{n+2} = 2y_{n+1} - \left(1 + \frac{3}{2}a\Delta x + b\Delta x^2\right)y_n + (2a\Delta x)y_{n-1} - \left(\frac{a}{2}\Delta x\right)y_{n-2}$
3	Adelantadas de $O(\Delta x)$	Centradas de $O(\Delta x^2)$	$y_{n+2} = \left(2 - \frac{a}{2}\Delta x\right)y_{n+1} - (1 + b\Delta x^2)y_n + \left(\frac{a}{2}\Delta x\right)y_{n-1}$
4	Adelantadas de $O(\Delta x)$	Adelantadas de $O(\Delta x^2)$	$y_{n+2} = \frac{(2 - 2a\Delta x)y_{n+1} + \left(\frac{3}{2}a\Delta x - b\Delta x^2 - 1\right)y_n}{1 - \frac{a}{2}\Delta x}$
5	Adelantadas de $O(\Delta x)$	Centradas de $O(\Delta x^4)$	$y_{n+2} = \left[\left(2 - \frac{2}{3}a\Delta x\right)y_{n+1} - (b\Delta x^2 + 1)y_n + \left(\frac{2}{3}a\Delta x\right)y_{n-1} - \left(\frac{a}{12}\Delta x\right)y_{n-2} \right] / \left(1 - \frac{a}{12}\Delta x\right)$

Tabla III: Algunos esquemas de diferencias finitas para la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes constantes.

	Representación Discreta de $\frac{d^2 y}{dx^2}$	Representación Discreta de $\frac{dy}{dx}$	Esquema de Diferencias Finitas para $\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = 0$
1	Atrasadas de $O(\Delta x^2)$	Adelantadas de $O(\Delta x)$	$y_{n+1} = \left(1 - \frac{2}{a\Delta x} - \frac{b}{a}\Delta x\right)y_n + \frac{1}{a\Delta x}(5y_{n-1} - 4y_{n-2} + y_{n-3})$
2	Atrasadas de $O(\Delta x^2)$	Atrasadas de $O(\Delta x^2)$	$y_n = \frac{(5 + 2a\Delta x)y_{n-1} - \left(4 + \frac{a}{2}\Delta x\right)y_{n-2} + y_{n-3}}{2 + \frac{3}{2}a\Delta x + b\Delta x^2}$
3	Atrasadas de $O(\Delta x^2)$	Centradas de $O(\Delta x^2)$	$y_{n+1} = \left(-\frac{4}{a\Delta x} - \frac{2b}{a}\Delta x\right)y_n + \left(\frac{10}{a\Delta x} + 1\right)y_{n-1} - \frac{2}{a\Delta x}(4y_{n-2} - y_{n-3})$
4	Atrasadas de $O(\Delta x^2)$	Adelantadas de $O(\Delta x^2)$	$y_{n+2} = 4y_{n+1} + \left(\frac{4}{a\Delta x} + \frac{2b}{a}\Delta x - 3\right)y_n + \frac{2}{a\Delta x}(-5y_{n-1} + 4y_{n-2} - y_{n-3})$
5	Atrasadas de $O(\Delta x^2)$	Centradas de $O(\Delta x^4)$	$y_{n+2} = 8y_{n+1} + \left(\frac{24}{a\Delta x} + \frac{12b}{a}\Delta x\right)y_n - \left(\frac{60}{a\Delta x} + 8\right)y_{n-1} + \left(\frac{48}{a\Delta x} + 1\right)y_{n-2} - \left(\frac{12}{a\Delta x}\right)y_{n-3}$

Tabla IV: Algunos esquemas de diferencias finitas para la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes constantes.

	Representación Discreta de $\frac{d^2 y}{dx^2}$	Representación Discreta de $\frac{dy}{dx}$	Esquema de Diferencias Finitas para $\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = 0$
1	Centradas de $O(\Delta x^2)$	Adelantadas de $O(\Delta x)$	$y_{n+1} = \frac{(2 + a\Delta x - b\Delta x^2)y_n - y_{n-1}}{1 + a\Delta x}$
2	Centradas de $O(\Delta x^2)$	Atrasadas de $O(\Delta x^2)$	$y_{n+1} = \left(2 - \frac{3}{2}a\Delta x - b\Delta x^2\right)y_n + (2a\Delta x - 1)y_{n-1} - \left(\frac{a}{2}\Delta x\right)y_{n-2}$
3	Centradas de $O(\Delta x^2)$	Centradas de $O(\Delta x^2)$	$y_{n+1} = \frac{(2 - b\Delta x^2)y_n + \left(\frac{a}{2}\Delta x - 1\right)y_{n-1}}{1 + \frac{a}{2}\Delta x}$
4	Centradas de $O(\Delta x^2)$	Adelantadas de $O(\Delta x^2)$	$y_{n+2} = \left(4 + \frac{2}{a\Delta x}\right)y_{n+1} + \left(\frac{2b}{a}\Delta x - \frac{4}{a\Delta x} - 3\right)y_n + \left(\frac{2}{a\Delta x}\right)y_{n-1}$
5	Centradas de $O(\Delta x^2)$	Centradas de $O(\Delta x^4)$	$y_{n+2} = \left(8 + \frac{12}{a\Delta x}\right)y_{n+1} + \left(\frac{12b}{a}\Delta x - \frac{24}{a\Delta x}\right)y_n + \left(\frac{12}{a\Delta x} - 8\right)y_{n-1} + y_{n-2}$

Tabla V: Algunos esquemas de diferencias finitas para la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes constantes.

	Representación Discreta de $\frac{d^2 y}{dx^2}$	Representación Discreta de $\frac{dy}{dx}$	Esquema de Diferencias Finitas para $\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = 0$
1	Adelantadas de $O(\Delta x^2)$	Adelantadas de $O(\Delta x)$	$y_{n+3} = 4y_{n+2} + (a\Delta x - 5)y_{n+1} + (b\Delta x^2 - a\Delta x + 2)y_n$
2	Adelantadas de $O(\Delta x^2)$	Atrasadas de $O(\Delta x^2)$	$y_{n+3} = 4y_{n+2} - 5y_{n+1} + \left(2 + \frac{3}{2}a\Delta x + b\Delta x^2\right)y_n$ $- (2a\Delta x)y_{n-1} + \left(\frac{a}{2}\Delta x\right)y_{n-2}$
3	Adelantadas de $O(\Delta x^2)$	Centradas de $O(\Delta x^2)$	$y_{n+3} = 4y_{n+2} + \left(\frac{a}{2}\Delta x - 5\right)y_{n+1} + (b\Delta x^2 + 2)y_n$ $- \left(\frac{a}{2}\Delta x\right)y_{n-1}$
4	Adelantadas de $O(\Delta x^2)$	Adelantadas de $O(\Delta x^2)$	$y_{n+3} = \left(4 - \frac{a}{2}\Delta x\right)y_{n+2} + (2a\Delta x - 5)y_{n+1}$ $+ \left(2 - \frac{3}{2}a\Delta x + b\Delta x^2\right)y_n$
5	Adelantadas de $O(\Delta x^2)$	Centradas de $O(\Delta x^4)$	$y_{n+3} = \left(4 - \frac{a}{12}\Delta x\right)y_{n+2} + \left(\frac{2}{3}a\Delta x - 5\right)y_{n+1}$ $+ \left(2 + b\Delta x^2\right)y_n - \left(\frac{2}{3}a\Delta x\right)y_{n-1} + \left(\frac{a}{12}\Delta x\right)y_{n-2}$

Tabla VI: Algunos esquemas de diferencias finitas para la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes constantes.

	Representación Discreta de $\frac{d^2 y}{dx^2}$	Representación Discreta de $\frac{dy}{dx}$	Esquema de Diferencias Finitas para $\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = 0$
1	Centradas de $O(\Delta x^4)$	Adelantadas de $O(\Delta x)$	$y_{n+2} = (16 + 12a\Delta x)y_{n+1} + (12b\Delta x^2 - 12a\Delta x - 30)y_n + 16y_{n-1} - y_{n-2}$
2	Centradas de $O(\Delta x^4)$	Atrasadas de $O(\Delta x^2)$	$y_{n+2} = 16y_{n+1} + (12b\Delta x^2 + 18a\Delta x - 30)y_n + (16 - 24a\Delta x)y_{n-1} + (6a\Delta x - 1)y_{n-2}$
3	Centradas de $O(\Delta x^4)$	Centradas de $O(\Delta x^2)$	$y_{n+2} = (16 + 6a\Delta x)y_{n+1} + (12b\Delta x^2 - 12a\Delta x - 30)y_n + (16 + 6a\Delta x)y_{n-1} - y_{n-2}$
4	Centradas de $O(\Delta x^4)$	Adelantadas de $O(\Delta x^2)$	$y_{n+2} = [(16 + 24a\Delta x)y_{n+1} + (12b\Delta x^2 - 18a\Delta x - 30)y_n + 16y_{n-1} - y_{n-2}](1 + 6a\Delta x)$
5	Centradas de $O(\Delta x^4)$	Centradas de $O(\Delta x^4)$	$y_{n+2} = [(16 + 8a\Delta x)y_{n+1} + (12b\Delta x^2 - 30)y_n + (16 - 8a\Delta x)y_{n-1} + (a\Delta x - 1)y_{n-2}](1 + a\Delta x)$

Por simplicidad tomemos las siguientes condiciones iniciales

$$y(0) = 1, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_0 = 0. \quad (37)$$

En las figuras 2, 4, 6, 8 vemos como los esquemas son muy sensitivos al cambio en el tamaño de paso y así como también al cambio en los valores de los coeficientes de la ecuación diferencial. El porcentaje del error se representa en términos del Porcentaje de Error Relativo, el cuál es

$$\%FE = \frac{|\delta y|}{|y|} \times 100 \quad (38)$$

donde $|\delta y| = |y(n\Delta x) - y_n|$.

Dependiendo de la exactitud deseada elegimos el algoritmo y el tamaño de paso. Sin embargo, el algoritmo seleccionado debe satisfacer los siguientes criterios,

- *Convergencia*: Diremos que la solución del esquema de diferencias finitas, y_n , converge a la solución de la ecuación diferencial, $y(n\Delta x)$, si $|y_n - y(n\Delta x)| \rightarrow 0$, conforme $\Delta x \rightarrow 0$. Esta es la condición bajo la cual la solución discreta tiende a la solución continua conforme el tamaño de paso tiende a cero.

- *Estabilidad*: Un esquema es estable si existe un número real M , tal que, $|y_n - y(n\Delta x)| \leq M$ conforme $n \rightarrow \infty$. Esta es la condición bajo la cual la diferencia entre las soluciones continua y discreta permanece acotada conforme n tiende a infinito.

Cuando tengamos un esquema con las dos propiedades anteriores lo llamaremos esquema consistente. Existen dos tipos de consistencia:

- *Consistencia condicional*: Si el término de truncamiento solamente tiende a cero si Δx tiende a cero de cierta manera.
- *Consistencia incondicional*: Si el término de truncamiento tiende a cero no importa como lo haga Δx .

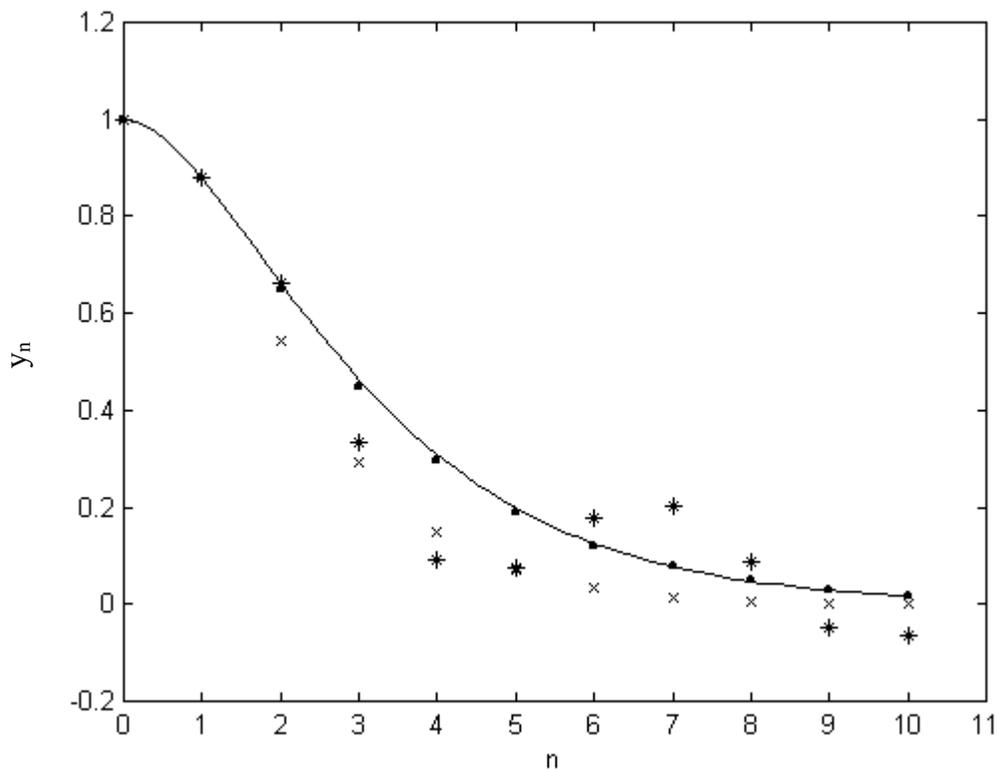


Figura 2: Comparación del esquema 1 (cruces) y el 3 (asteriscos) de la tabla 2, del esquema 3 (puntos) de la tabla 4 con un tamaño de paso de 0.6 y la solución continua $y(x) = e^{-x} + xe^{-x}$ (línea continua) de la ecuación (36) con $a = 2$, $b = 1$ y las condiciones iniciales (37).

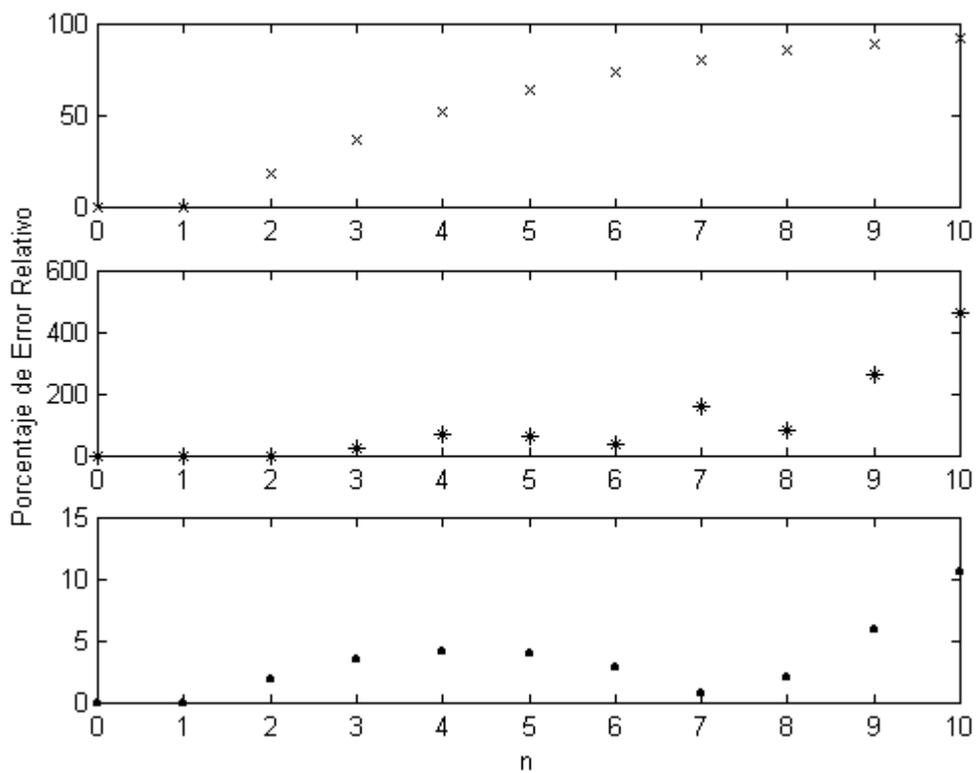


Figura 3: Porcentaje de error relativo de los esquemas 1 (cruces) y 3 (asteriscos) de la tabla 2, y del esquema 3 (puntos) de la tabla 4 con un tamaño de paso de 0.6, para la ecuación (36) con $a = 2$, $b = 1$ y las condiciones iniciales (37).

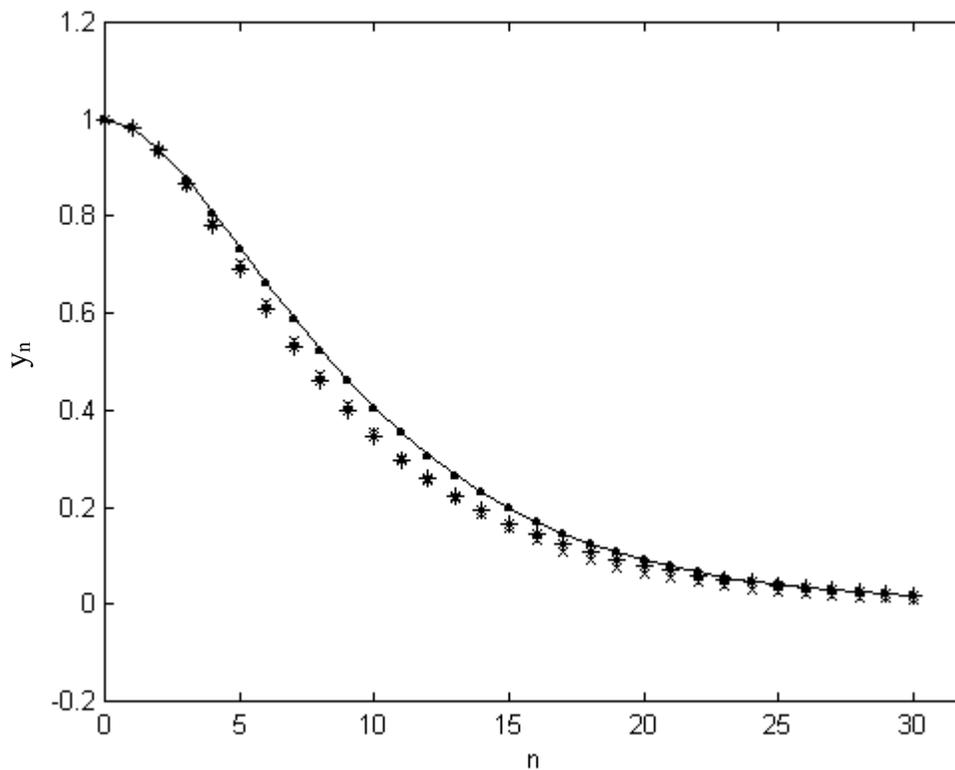


Figura 4: Comparación del esquema 1 (cruces) y el 3 (asteriscos) de la tabla 2, del esquema 3 (puntos) de la tabla 4 con un tamaño de paso de 0.2 y la solución continua $y(x) = e^{-x} + xe^{-x}$ (línea continua) de la ecuación (36) con $a = 2$, $b = 1$ y las condiciones iniciales (37).

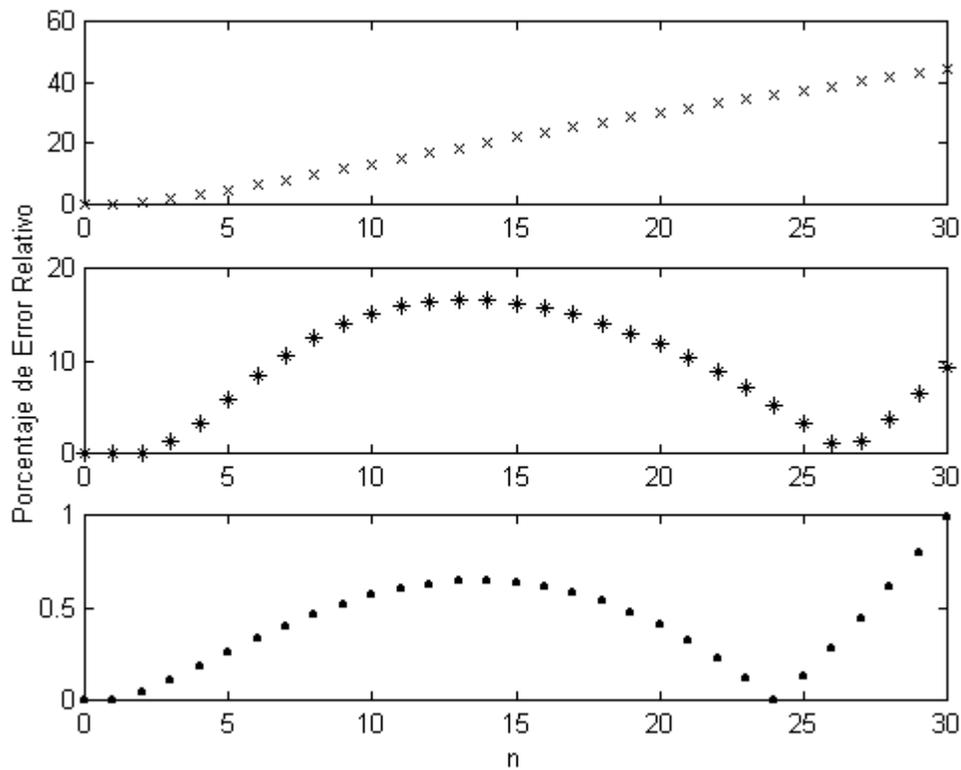


Figura 5: Porcentaje de error relativo de los esquemas 1 (cruces) y 3 (asteriscos) de la tabla 2, y del esquema 3 (puntos) de la tabla 4 con un tamaño de paso de 0.2, para la ecuación (36) con $a = 2$, $b = 1$ y las condiciones iniciales (37).

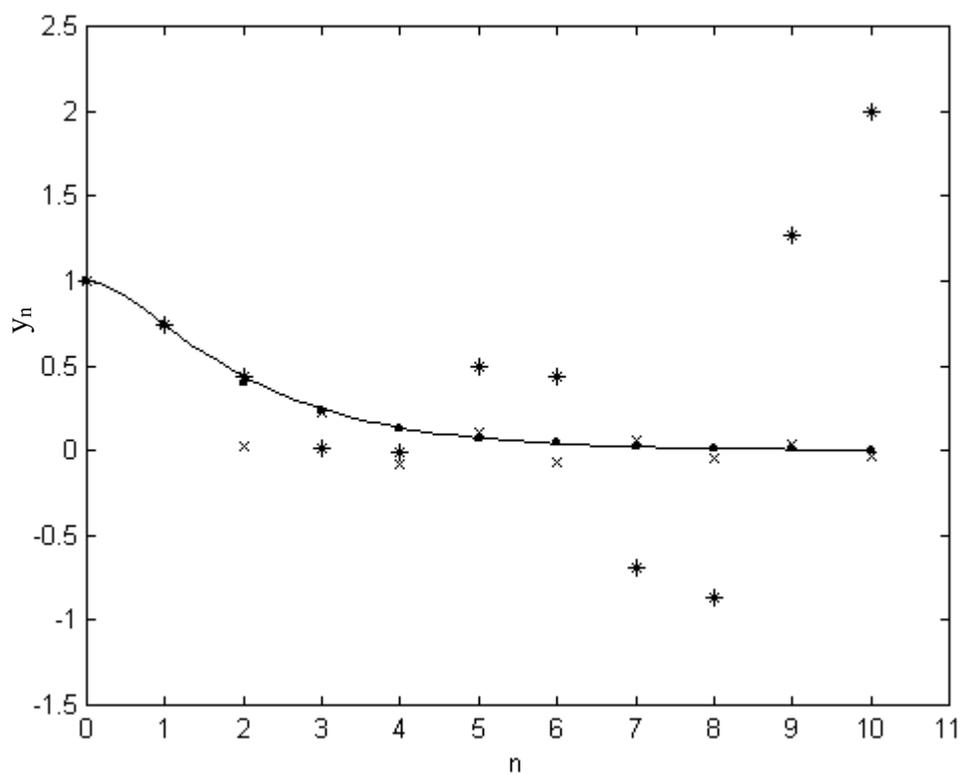


Figura 6: Comparación del esquema 1 (cruces) y el 3 (asteriscos) de la tabla 2, del esquema 3 (puntos) de la tabla 4 con un tamaño de paso de 0.6 y la solución continua $y(x) = \frac{3}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-3x}$ (línea continua) de la ecuación (36) con $a = 4$, $b = 3$ y las condiciones iniciales (37).

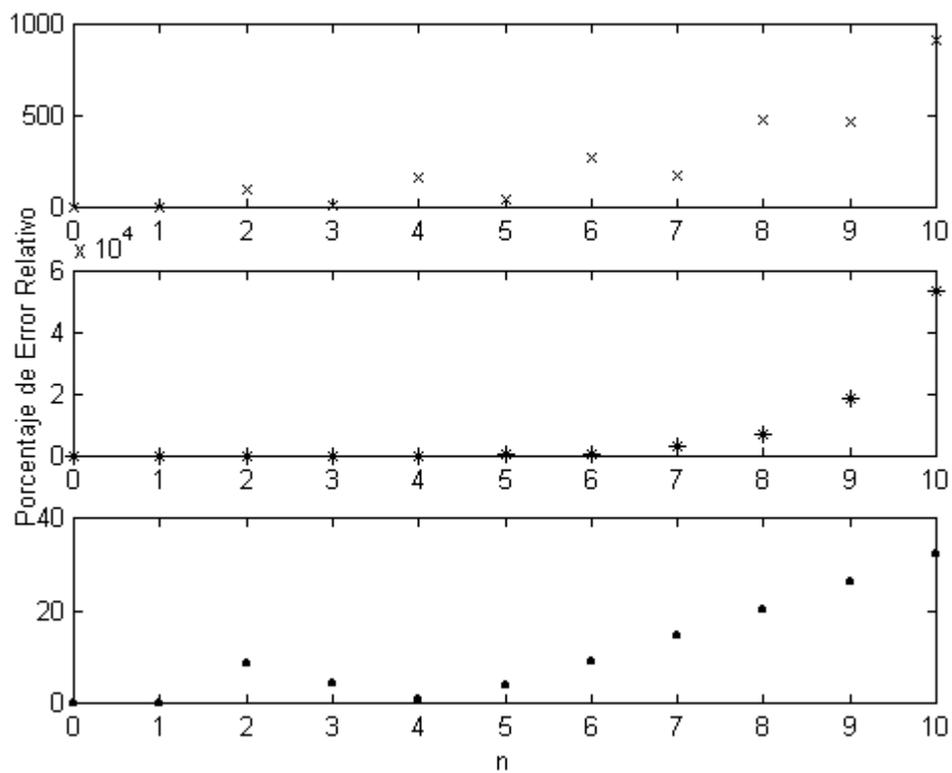


Figura 7: Porcentaje de error relativo de los esquemas 1 (cruces) y 3 (asteriscos) de la tabla 2, y del esquema 3 (puntos) de la tabla 4 con un tamaño de paso de 0.6, para la ecuación (36) con $a = 4$, $b = 3$ y las condiciones iniciales (37).

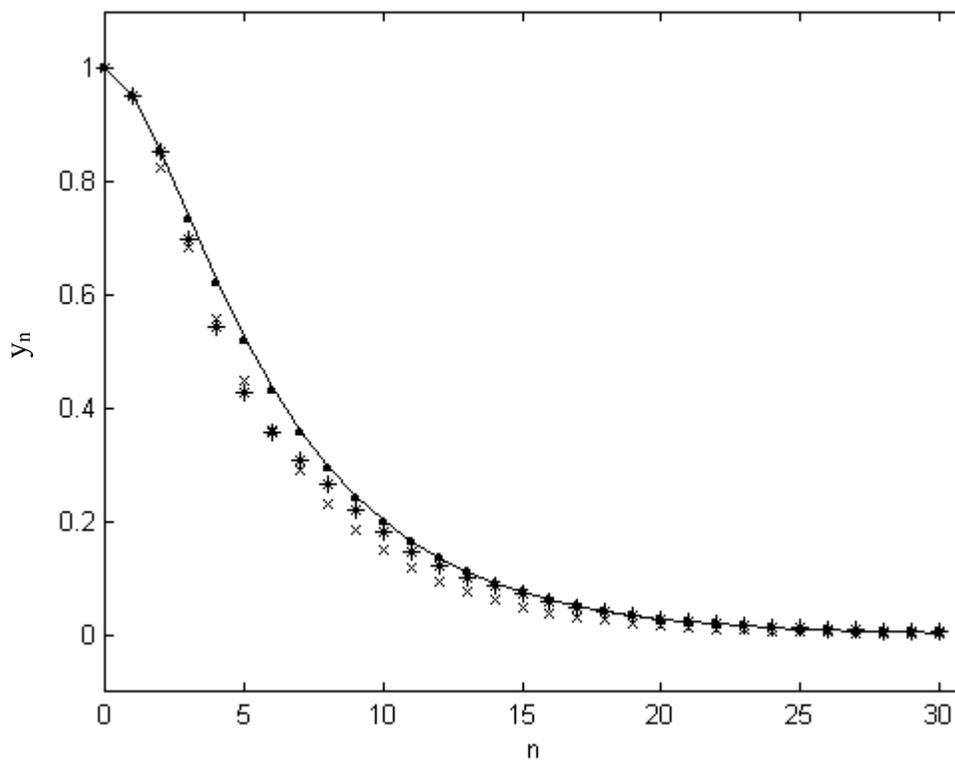


Figura 8: Comparación del esquema 1 (cruces) y el 3 (asteriscos) de la tabla 2, del esquema 3 (puntos) de la tabla 4 con un tamaño de paso de 0.2 y la solución continua $y(x) = \frac{3}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-3x}$ (línea continua) de la ecuación (36) con $a = 4$, $b = 3$ y las condiciones iniciales (37).

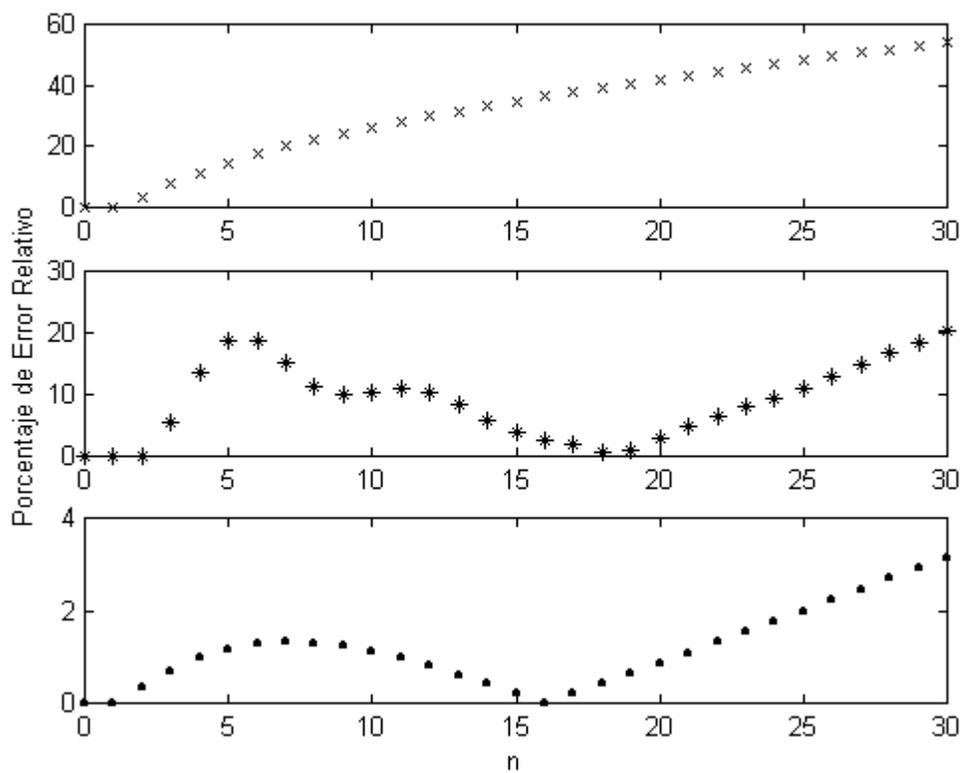


Figura 9: Porcentaje de error relativo de los esquemas 1 (cruces) y 3 (asteriscos) de la tabla 2, y del esquema 3 (puntos) de la tabla 4 con un tamaño de paso de 0.2, para la ecuación (36) con $a = 4$, $b = 3$ y las condiciones iniciales (37).

Es obvio que si tomamos un orden de exactitud mayor en los esquemas de diferencias y disminuimos el tamaño de paso, la metodología tradicional de las diferencias finitas puede hacer que la solución discreta sea igual a la solución continua. Sin embargo, ésta es una metodología primitiva.

III. EL ESQUEMA DE DIFERENCIAS FINITAS EXACTAS PARA LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

Como vimos en el capítulo anterior, la única manera de que los esquemas de diferencias convencionales puedan imitar exactamente a la ecuación diferencial, es escogiendo el tamaño de paso infinitesimalmente pequeño. Al menos para aquellas ecuaciones diferenciales para las que conocemos la forma general de la solución, podemos deducir el esquema de diferencias finitas exactas (el cual será independiente del tamaño de paso) utilizando la forma de la solución continua. Para el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes, Potts (1982) encontró el esquema exacto utilizando este procedimiento.

En este capítulo reproducimos los resultados obtenidos por Potts mediante un camino modificado. Primeramente, siguiendo el procedimiento llevado a cabo por Potts, construimos el esquema de diferencias finitas exactas para la ecuación diferencial de primer orden utilizando la forma general de su solución. Después, del esquema exacto para la ecuación de primer orden, reconocemos la equivalencia del operador diferencial con el operador de desplazamiento. Basándonos en esta equivalencia, construimos el esquema de diferencias exactas para las ecuaciones diferenciales ordinarias de orden mayor y validamos dichos esquemas mediante ejemplos numéricos.

Si conocemos la solución general, entonces ¿cuál es el objetivo de construir esquemas discretos? Podemos calcular los valores numéricos de la función directamente de la

solución misma. Por lo que, si afirmamos tener una metodología apropiada, el esquema exacto para la ecuación diferencial ordinaria de primer orden debe construirse sin utilizar la forma general de la solución.

El procedimiento que utilizan los esquemas de diferencias finitas tradicionales, (utilizar una expansión de Taylor truncada) no toma explícitamente en cuenta la relación existente entre la función y sus derivadas, como se indica en la ecuación diferencial dada. En la última sección de este capítulo mostramos como utilizar la ecuación diferencial en la expansión de Taylor para remover los términos diferenciales de orden mayor para de esta forma producir un esquema de diferencias finitas exactas. Además, todos los esquemas exactos presentados en este capítulo se derivan independientemente de la solución general, por lo que, tenemos una metodología apropiada.

III.1. La ecuación primitiva: La EDO de primer orden con coeficiente constante

Iniciemos con la EDO de primer orden con coeficiente constante,

$$\frac{dy(x)}{dx} - \alpha y(x) = 0 \quad (39)$$

La cual tiene una solución general de la forma

$$y(x) = Ae^{\alpha x} \quad (40)$$

donde A es una constante real determinada por la condición inicial. Discreticemos la variable independiente mediante,

$$x = n\Delta x \quad (41)$$

y denominemos a la función sobre el punto discreto $n\Delta x$ como,

$$y(n\Delta x) = y_n \quad (42)$$

donde n es un número entero. Así, la forma discreta de la solución (40) es,

$$y_n = Ae^{\alpha n\Delta x}. \quad (43)$$

Podemos construir un esquema recursivo (ecuación de diferencias) al tomar la diferencia de la solución en dos puntos consecutivos como se muestra enseguida

$$y_{n+1} - y_n = Ae^{\alpha(n+1)\Delta x} - Ae^{\alpha n\Delta x} = Ae^{\alpha n\Delta x} (e^{\alpha\Delta x} - 1) = y_n (e^{\alpha\Delta x} - 1), \quad (44)$$

el cual produce

$$y_{n+1} - e^{\alpha \Delta x} y_n = 0. \quad (45)$$

Pongamos a prueba el esquema (45), mediante un ejemplo numérico. Por simplicidad tomemos $\alpha = 1$ y la condición inicial $y(0) = 1$. La solución analítica es,

$$y(x) = e^x. \quad (46)$$

El esquema de diferencias finitas exactas correspondiente a esta ecuación es,

$$y_{n+1} = e^{\Delta x} y_n \quad \text{con } y_0 = 1. \quad (47)$$

Con el objeto de llevar a cabo algunas comparaciones, tomemos el esquema convencional de la ecuación (39)

$$y_{n+1} = (1 + \Delta x) y_n. \quad (48)$$

En las figuras 10 y 12 vemos que el esquema exacto, independientemente del tamaño de paso, reproduce los mismo valores que la solución continua. No siendo el caso del esquema tradicional, el cual tiende a la solución continua conforme el tamaño de paso tiende a cero, una vez que el esquema ha cumplido con el criterio de convergencia.

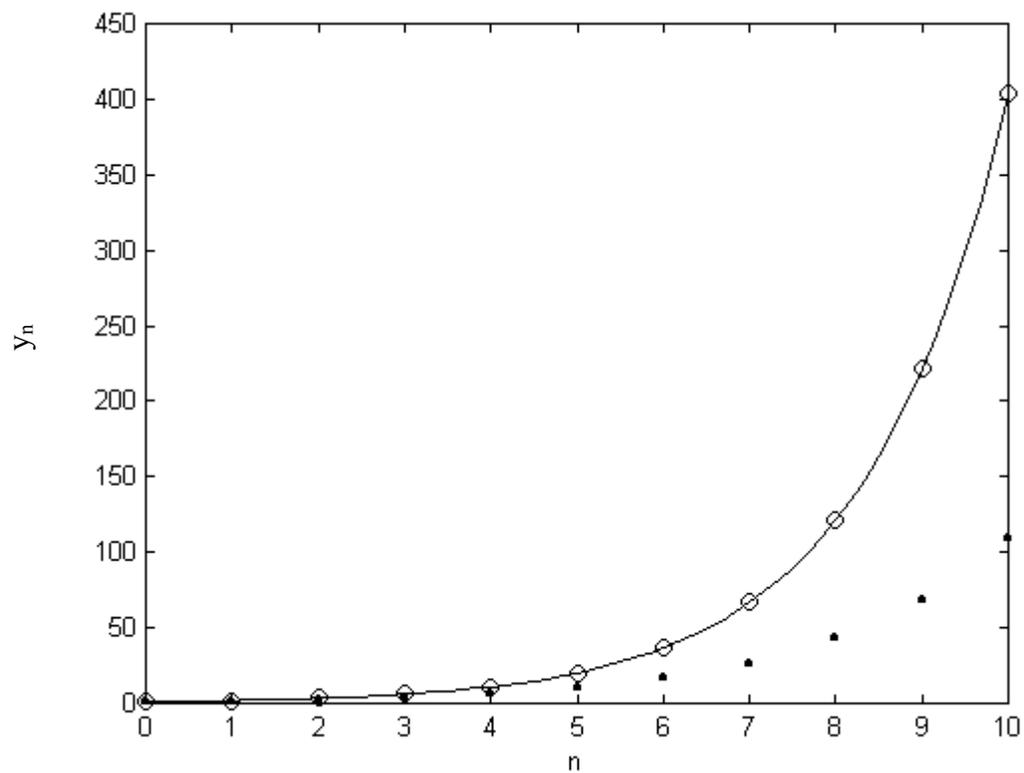


Figura 10: Comparación de la solución continua (46) (línea continua) con la solución discreta obtenida del esquema de diferencias finitas exactas (47) [círculos] y del esquema de diferencias finitas adelantadas de orden $O(\Delta x)$ (48) [puntos] con un tamaño de paso de 0.6.

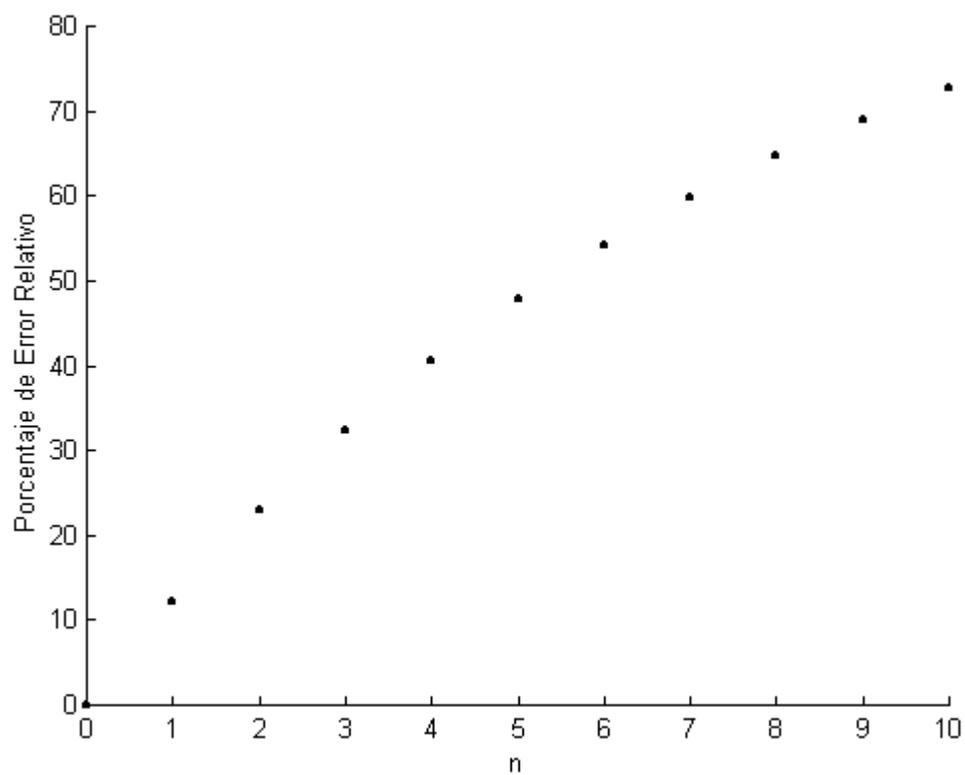


Figura 11: Porcentaje de error relativo del esquema de diferencias finitas (48) con un tamaño de paso de 0.6.

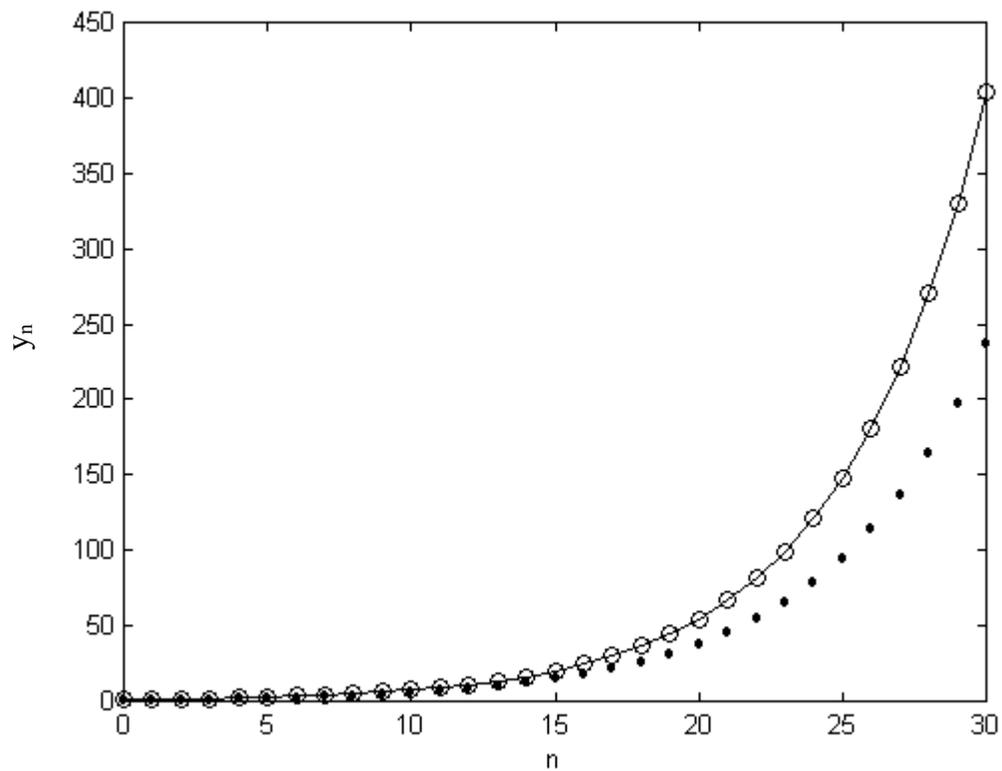


Figura 12: Comparación de la solución continua (46) (línea continua) con la solución discreta obtenida del esquema de diferencias finitas exactas (47) [círculos] y del esquema de diferencias finitas adelantadas de orden $O(\Delta x)$ (48) [puntos] con un tamaño de paso de 0.2.

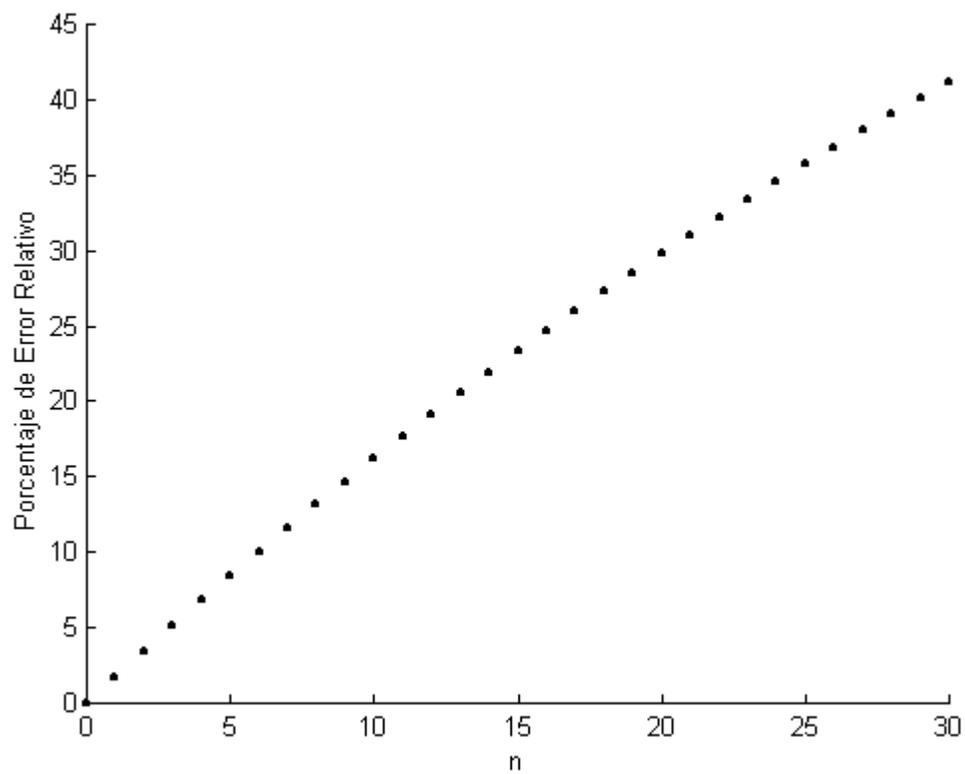


Figura 13: Porcentaje de error relativo del esquema de diferencias finitas (48) con un tamaño de paso de 0.2.

III.2. El esquema de diferencias finitas exactas para la EDO de orden mayor con coeficientes constantes

Usando el concepto del operador de desplazamiento E introducido en la sección II.1. reconocemos que $y_{n+1} = Ey_n$. Entonces, la ecuación (45) la podemos escribir como

$$(E - e^{\alpha \Delta x})y_n = 0 \quad (49)$$

Comparando las ecuaciones (39) y la (49) vemos que el operador diferencial $\frac{d}{dx}$ ha sido reemplazado por el operador de desplazamiento E y la raíz α del polinomio característico de la ecuación diferencial ha sido substituida en la ecuación de diferencias por $e^{\alpha \Delta x}$. Esta misma idea se utiliza en la construcción de los esquemas de diferencias finitas exactas para las ecuaciones diferenciales ordinarias de orden mayor.

III.2.1. La EDO de segundo orden con coeficientes constantes

La ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes constantes

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + a \frac{dy(x)}{dx} + by(x) = 0 \quad (50)$$

la podemos escribir alternativamente como

$$\left(\frac{d}{dx} - \beta\right)\left(\frac{d}{dx} - \alpha\right)y(x) = 0 \quad (51)$$

donde α y β son las raíces del polinomio característico de la ecuación (50). Como explicamos en la sección previa, utilizamos la idea de la equivalencia de la derivada continua con el operador de desplazamiento, por lo que podemos escribir la ecuación (51) en el dominio discreto como

$$(E - e^{\beta \Delta x})(E - e^{\alpha \Delta x})y_n = 0. \quad (52)$$

Usando la propiedad distributiva, tenemos que

$$(E^2 - E(e^{\alpha \Delta x} + e^{\beta \Delta x}) + e^{(\alpha + \beta) \Delta x})y_n = 0. \quad (53)$$

Recordando la propiedad (8) del operador de desplazamiento,

$$E^2(y_n) = y_{n+2} \quad y \quad Ey_n = y_{n+1}, \quad (54)$$

El esquema de diferencias finitas exactas para la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes constantes es,

$$y_{n+2} = (e^{\alpha \Delta x} + e^{\beta \Delta x}) y_{n+1} - e^{(\alpha+\beta) \Delta x} y_n. \quad (55)$$

Debemos notar que no construimos el esquema recursivo (55) utilizando la solución general de la ecuación diferencial (50). Enseguida hacemos una validación numérica del esquema (55) comparando la solución discreta con la solución continua y encontramos que es exacto (figuras 14, 16, 18, 20).

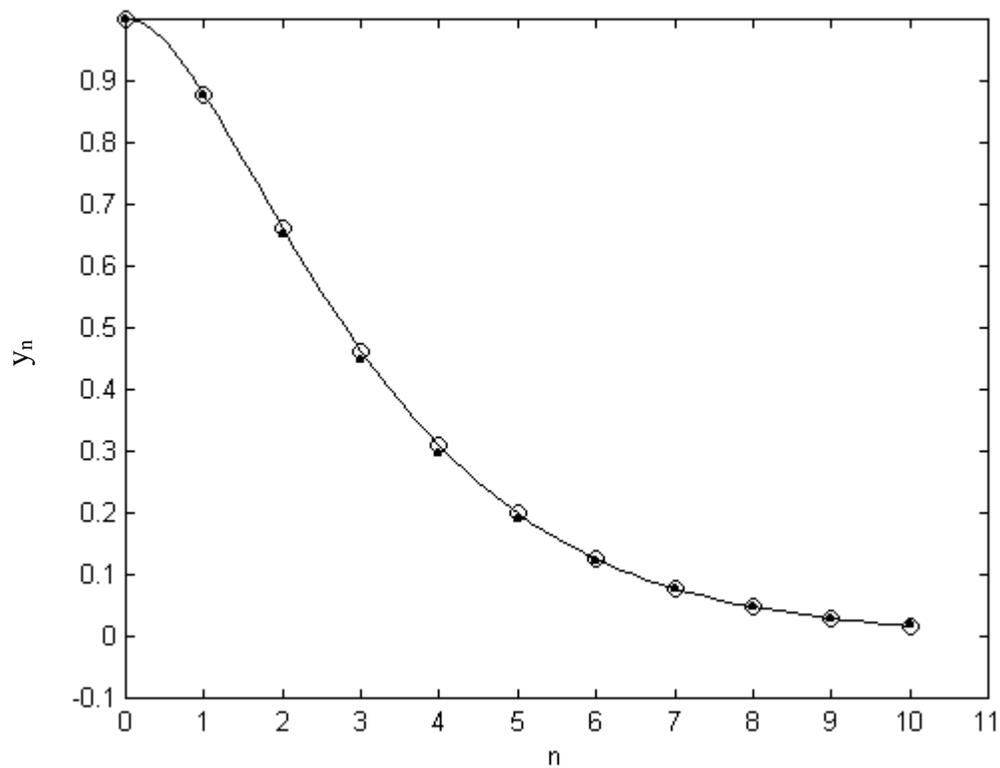


Figura 14: Comparación del esquema de diferencias finitas (55) [círculos] y del esquema de diferencias centradas 3 de la tabla 4 (puntos) con un tamaño de paso de 0.6, y la solución continua $y(x) = e^{-x} + xe^{-x}$ (línea continua) de la ecuación (50) con $a = 2$, $b = 1$ y las condiciones iniciales (37).

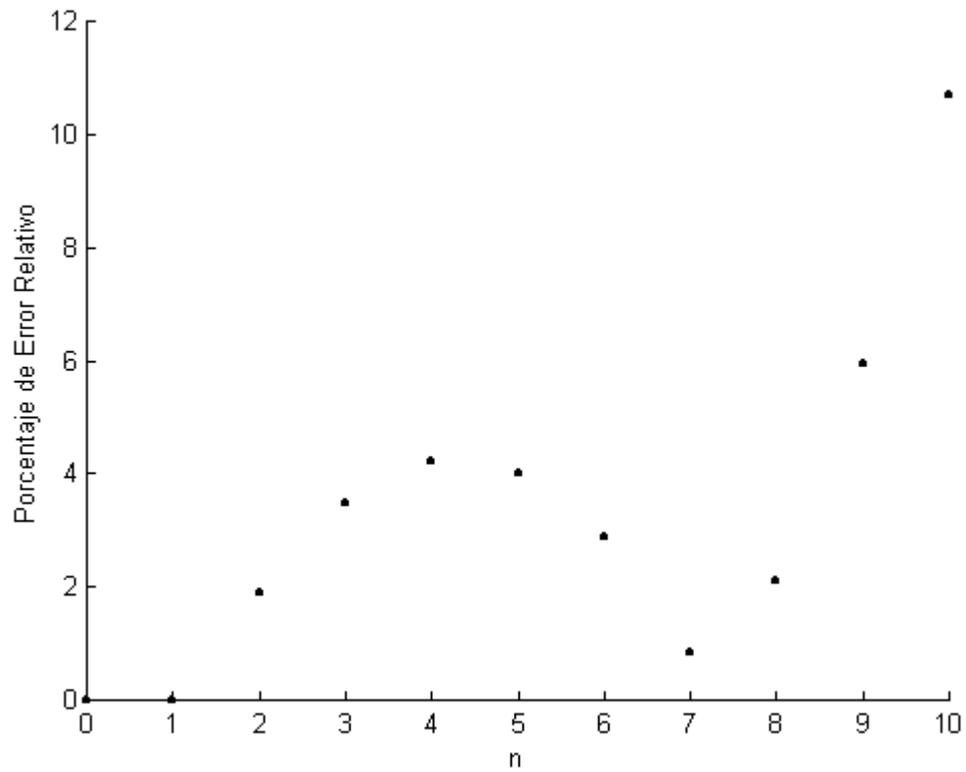


Figura 15: Porcentaje de error relativo del esquema de diferencias finitas 3 de la tabla 4 con un tamaño de paso de 0.6, para la ecuación (50) con $a = 2$, $b = 1$ y las condiciones iniciales (37).

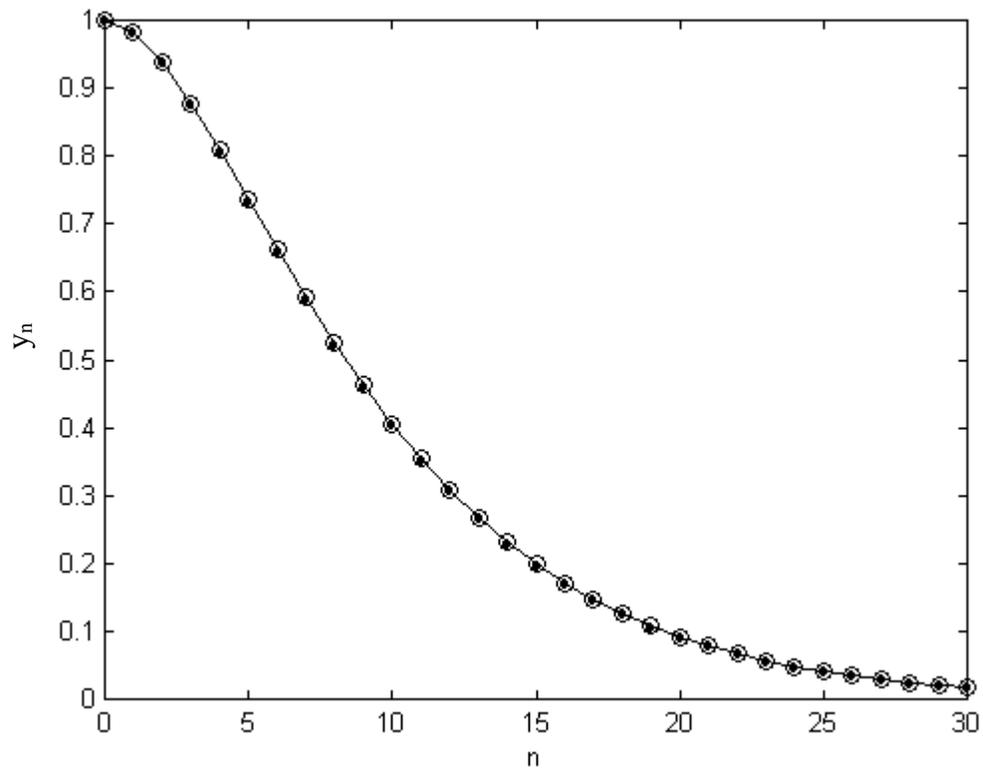


Figura 16: Comparación del esquema de diferencias finitas (55) [círculos] y del esquema de diferencias centradas 3 de la tabla 4 (puntos) con un tamaño de paso de 0.2, y la solución continua $y(x) = e^{-x} + xe^{-x}$ (línea continua) de la ecuación (50) con $a = 2$, $b = 1$ y las condiciones iniciales (37).

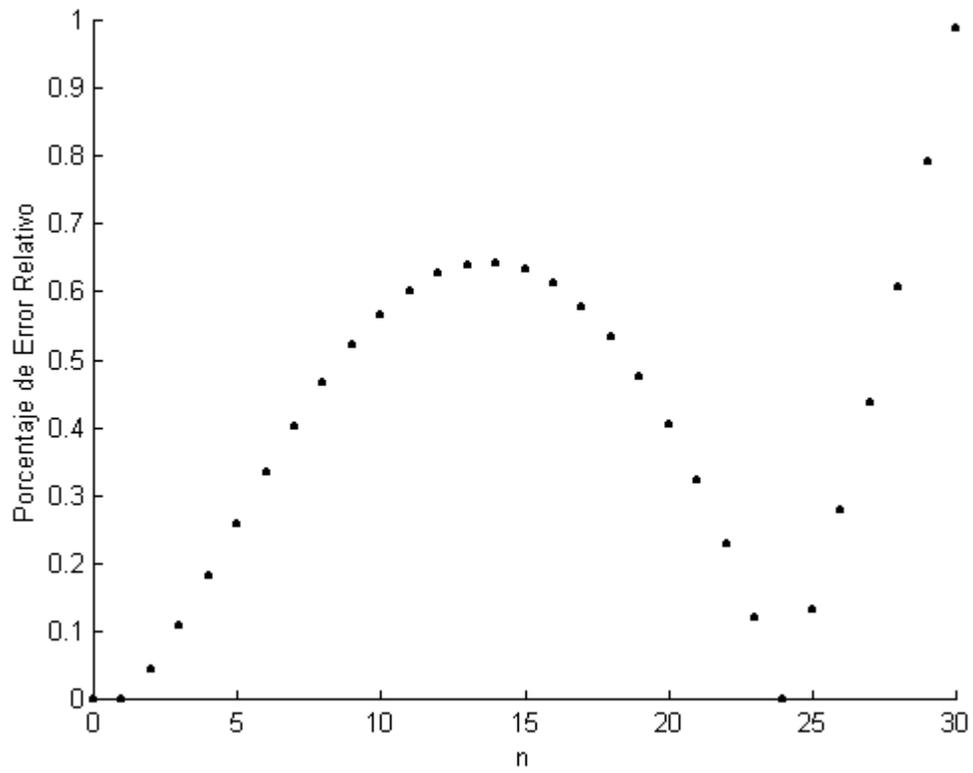


Figura 17: Porcentaje de error relativo del esquema de diferencias finitas 3 de la tabla 4 con un tamaño de paso de 0.2, para la ecuación (50) con $a = 2$, $b = 1$ y las condiciones iniciales (37).

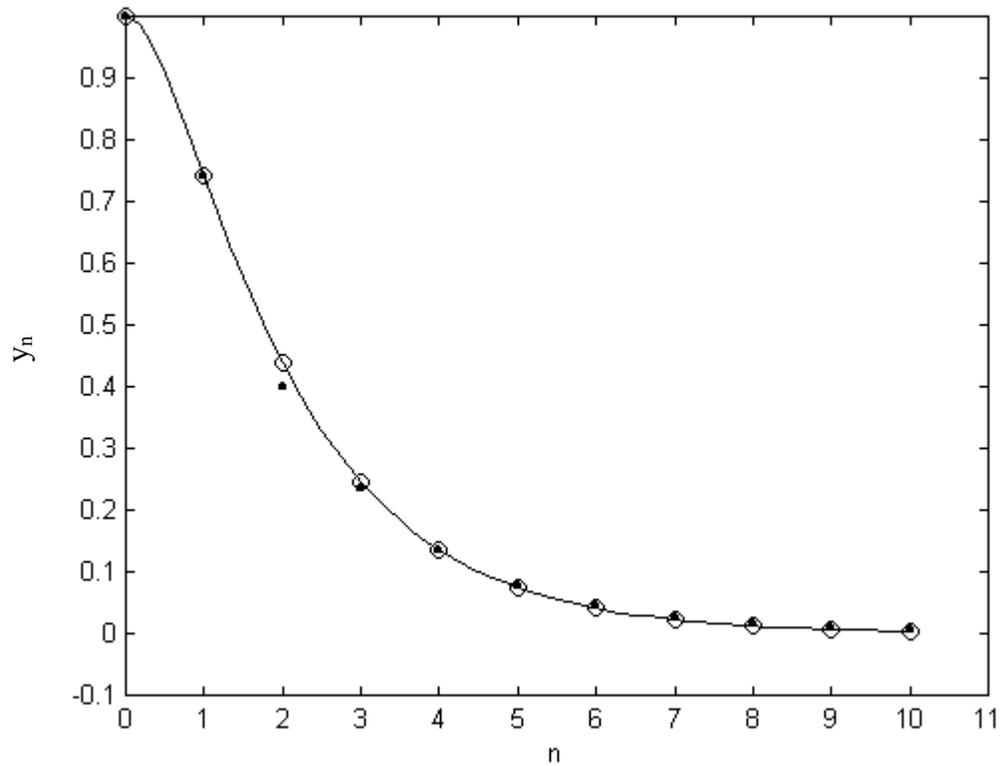


Figura 18: Comparación del esquema de diferencias finitas (55) [círculos] y del esquema de diferencias centradas 3 de la tabla 4 (puntos) con un tamaño de paso de 0.6, y la solución continua $y(x) = \frac{3}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-3x}$ (línea continua) de la ecuación (50) $a = 4$, $b = 3$ y las condiciones iniciales (37).

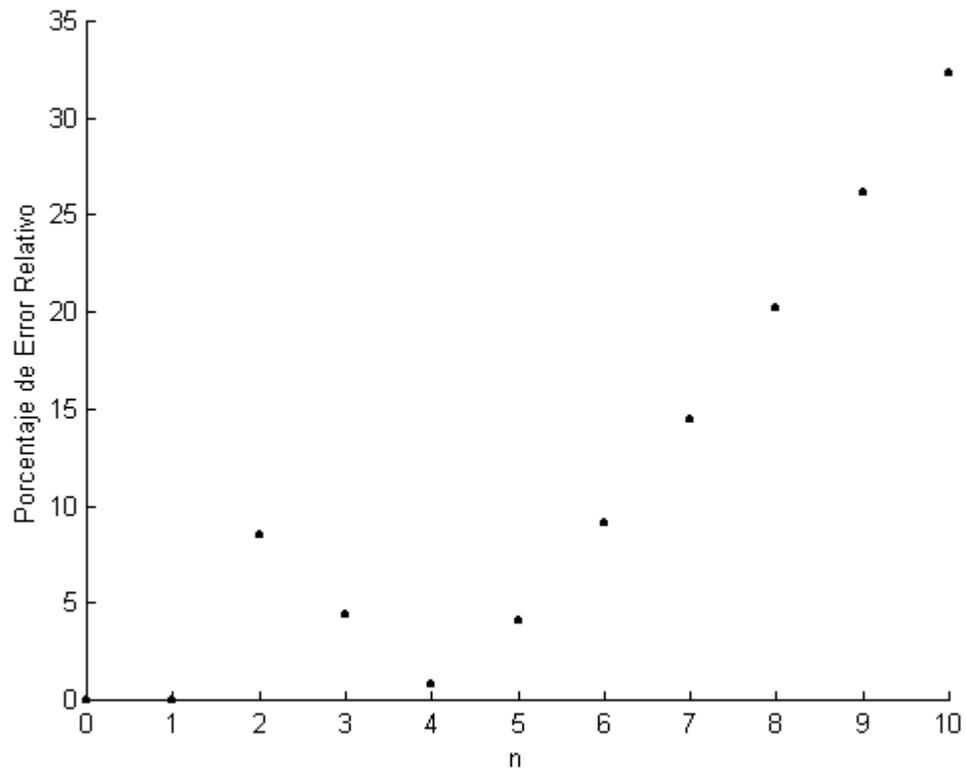


Figura 19: Porcentaje de error relativo del esquema de diferencias finitas 3 de la tabla 4 con un tamaño de paso de 0.6, para la ecuación (50) con $a = 4$, $b = 3$ y las condiciones iniciales (37).

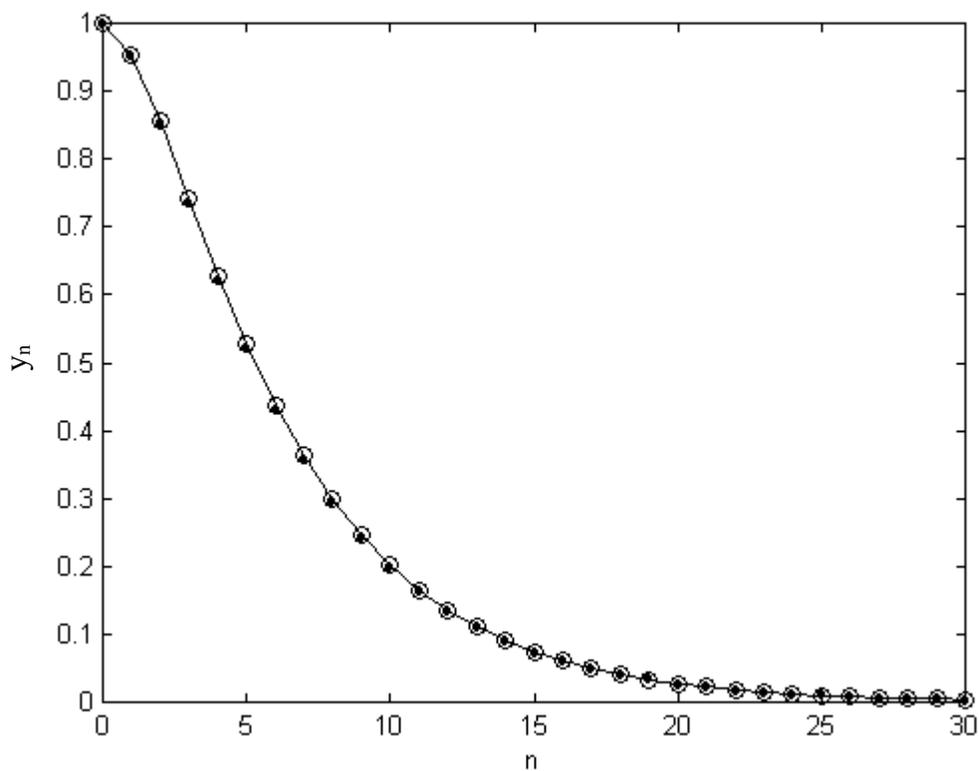


Figura 20: Comparación del esquema de diferencias finitas (55) [círculos] y del esquema de diferencias centradas 3 de la tabla 4 (puntos) con un tamaño de paso de 0.2, y la solución continua $y(x) = \frac{3}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-3x}$ (línea continua) de la ecuación (50) $a = 4$, $b = 3$ y las condiciones iniciales (37).

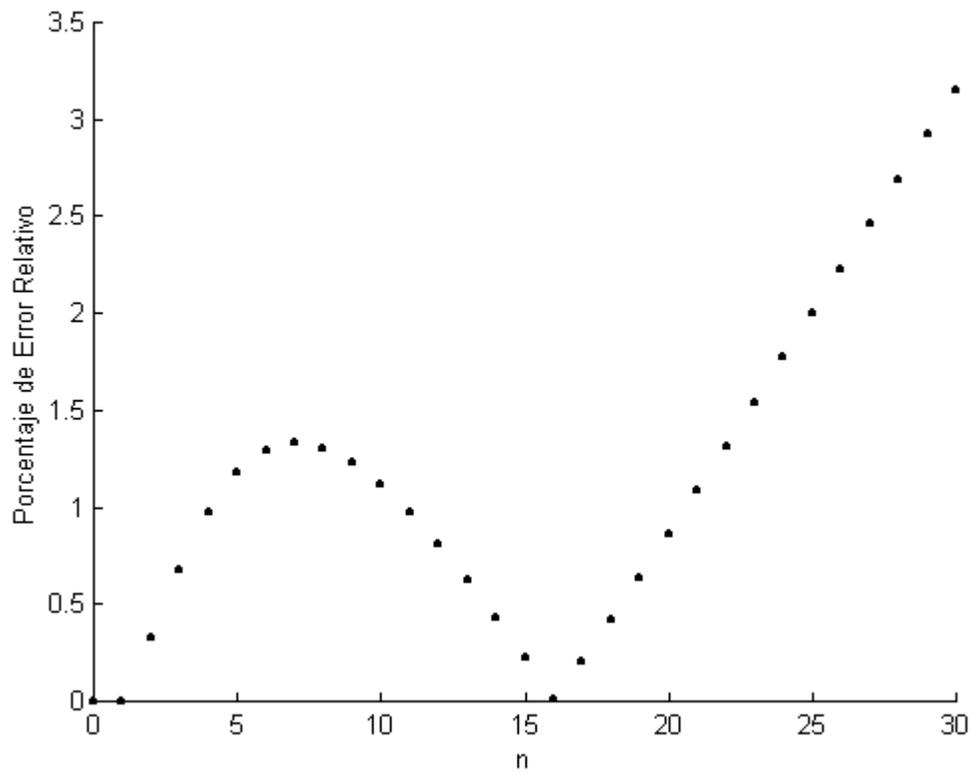


Figura 21: Porcentaje de error relativo del esquema de diferencias finitas 3 de la tabla 4 con un tamaño de paso de 0.2, para la ecuación (50) con $a = 4$, $b = 3$ y las condiciones iniciales (37).

III.2.2. La EDO de tercer orden con coeficientes constantes

La ecuación diferencial ordinaria de tercer orden con coeficientes constantes es

$$\frac{d^3 y(x)}{dx^3} + a \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + b \frac{dy(x)}{dx} + cy(x) = 0. \quad (56)$$

Expresando la ecuación (56) como el producto de tres operadores de primer orden y siguiendo el procedimiento de reemplazar el operador diferencial por el operador de desplazamiento, tenemos que

$$y_{n+3} = (e^{\alpha \Delta x} + e^{\beta \Delta x} + e^{\gamma \Delta x}) y_{n+2} - (e^{(\alpha+\beta) \Delta x} + e^{(\alpha+\gamma) \Delta x} + e^{(\beta+\gamma) \Delta x}) y_{n+1} + e^{(\alpha+\beta+\gamma) \Delta x} y_n. \quad (57)$$

Aquí α, β, γ son las raíces del polinomio característico de la ecuación diferencial. Es claro que el esquema (57) produce que la solución discreta sea igual a la solución continua, mientras que los esquemas de diferencias tradicionales lo hacen deficientemente (figuras 22 y 24).

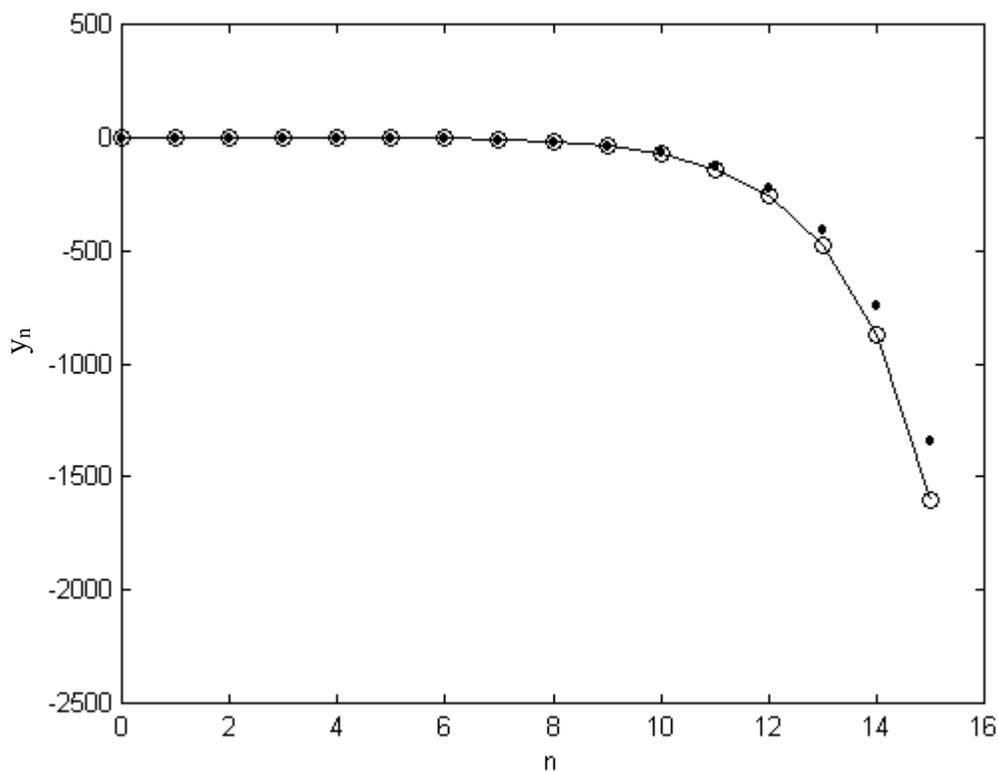


Figura 22: Comparación del esquema de diferencias finitas exactas (57) [círculos] y el esquema de diferencias centradas de orden $O(\Delta x^2)$ (puntos) con un tamaño de paso de 0.2, y la solución continua $y(x) = -\frac{1}{5}e^{3x} + \frac{1}{5}e^{-2x} + e^x$ (línea continua) de la ecuación (56) con $a = -2, b = -5, c = 6$ y las condiciones iniciales $y(0) = 1, \frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = 0, \frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0} = 0$.

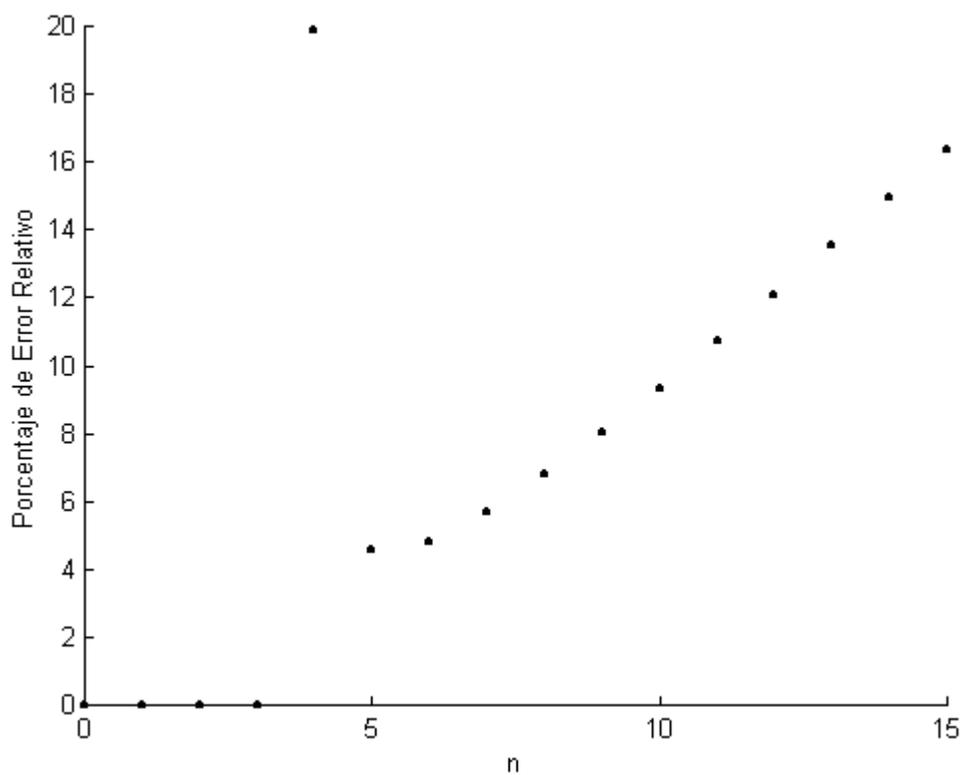


Figura 23: Porcentaje de error relativo del esquema de diferencias finitas centradas de orden $O(\Delta x^2)$ con un tamaño de paso de 0.2 para la ecuación (56) con

$a = -2, b = -5, c = 6$ y las condiciones iniciales $y(0)=1, \frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = 0, \frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0} = 0$.

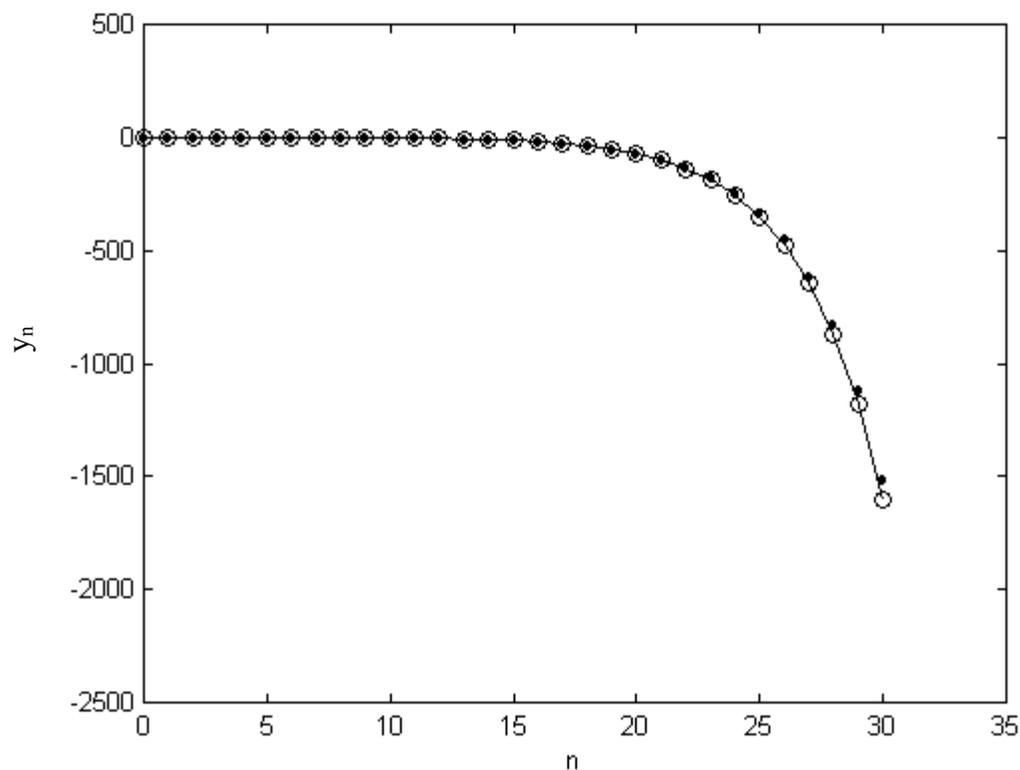


Figura 24: Comparación del esquema de diferencias finitas exactas (57) [círculos] y el esquema de diferencias centradas de orden $O(\Delta x^2)$ (puntos) con un tamaño de paso de 0.1, y la solución continua $y(x) = -\frac{1}{5}e^{3x} + \frac{1}{5}e^{-2x} + e^x$ (línea continua) de la ecuación (56) con $a = -2, b = -5, c = 6$ y las condiciones iniciales $y(0) = 1, \frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = 0, \frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0} = 0$.

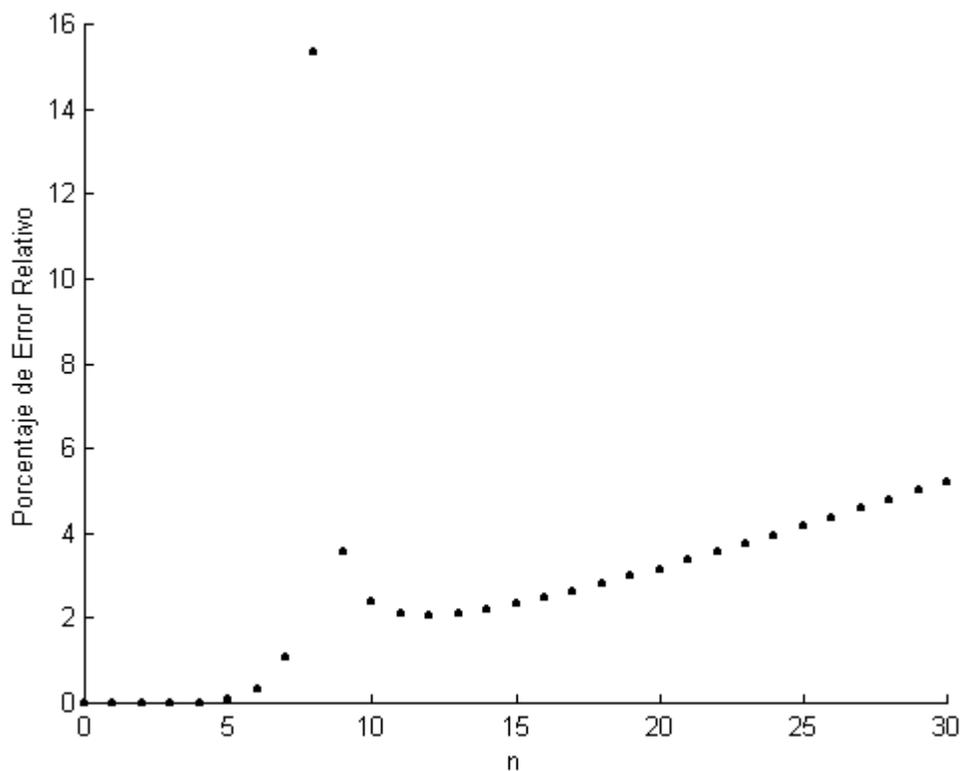


Figura 25: Porcentaje de error relativo del esquema de diferencias finitas centradas de orden $O(\Delta x^2)$ con un tamaño de paso de 0.1 para la ecuación (56) con

$a = -2, b = -5, c = 6$ y las condiciones iniciales $y(0)=1, \frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = 0, \frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0} = 0$.

III.2.3. La EDO de orden mayor con coeficientes constantes

La ecuación diferencial ordinaria de orden n con coeficientes constantes es

$$a_n \frac{d^n y(x)}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(x)}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(x)}{dx} + a_0 y(x) = 0, \quad (58)$$

la cual la factorizamos como,

$$\left(\frac{d}{dx} - \alpha_n \right) \left(\frac{d}{dx} - \alpha_{n-1} \right) \cdots \left(\frac{d}{dx} - \alpha_2 \right) \left(\frac{d}{dx} - \alpha_1 \right) y(x) = 0 \quad (59)$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ son las raíces del polinomio característico de la ecuación diferencial. Substituyendo cada uno de los términos factorizados por su respectiva representación discreta de la forma (49), obtenemos su esquema de diferencias finitas exactas,

$$\left(E - e^{\alpha_n \Delta x} \right) \left(E - e^{\alpha_{n-1} \Delta x} \right) \cdots \left(E - e^{\alpha_1 \Delta x} \right) y_n = 0. \quad (60)$$

Debemos notar que solamente hemos construido el esquema exacto para la EDO de primer orden con coeficiente constante utilizando la forma general de la solución. Los esquemas exactos para las EDO de orden mayor con coeficientes constantes no evocan

la forma general de la solución. En la siguiente sección mostraremos como construir el esquema exacto para la EDO de primer orden usando la expansión de Taylor completa y en conjunto con la ecuación diferencial misma, de esta manera no utilizamos la forma general de la solución como se hizo en la sección III.1. De esta forma logramos obtener una metodología apropiada.

III.3. Bases firmes para el esquema de diferencias finitas exactas para la ecuación primitiva

Sea $y(x)$ una función continua y diferenciable, entonces de la expansión de Taylor tenemos que

$$y(x + \Delta x) = y(x) + \Delta x \frac{dy}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{\Delta x^4}{4!} \frac{d^4 y}{dx^4} + \dots + \frac{\Delta x^n}{n!} \frac{d^n y}{dx^n} + \dots \quad (61)$$

Supongamos que $y(x)$ satisface la ecuación diferencial (39). Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 y(x)}{dx^2} &= \frac{d}{dx} [\alpha y(x)] = \alpha \frac{d}{dx} [y(x)] = \alpha^2 y(x) \\
\frac{d^3 y(x)}{dx^3} &= \alpha^3 y(x) \\
&\vdots \\
\frac{d^n y(x)}{dx^n} &= \alpha^n y(x) \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{62}$$

Utilizando la ecuación diferencial (39) (y las relaciones derivadas de la misma, ecuaciones (62)), eliminamos los términos diferenciales de la ecuación (61), por lo que tenemos

$$\begin{aligned}
y(x + \Delta x) &= y(x) + \Delta x \alpha y(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} \alpha^2 y(x) + \frac{\Delta x^3}{3!} \alpha^3 y(x) + \frac{\Delta x^4}{4!} \alpha^4 y(x) + \dots + \frac{\Delta x^n}{n!} \alpha^n y(x) + \dots \\
&= \left(1 + \Delta x \alpha + \frac{\Delta x^2}{2!} \alpha^2 + \frac{\Delta x^3}{3!} \alpha^3 + \frac{\Delta x^4}{4!} \alpha^4 + \dots + \frac{\Delta x^n}{n!} \alpha^n + \dots \right) y(x) \\
&= e^{\alpha \Delta x} y(x)
\end{aligned} \tag{63}$$

Utilizando la notación (41) y (42) en la ecuación (63), obtenemos el esquema de diferencias finitas exactas (45).

Observemos que el procedimiento tradicional simplemente no toma en cuenta los términos de orden mayor de la expansión de Taylor, mientras que, en nuestra metodología hemos utilizado la ecuación diferencial para incorporar la parte truncada y así obtener el esquema exacto.

IV. EL ESQUEMA DE DIFERENCIAS FINITAS EXACTAS PARA LAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES CON COEFICIENTES CONSTANTES EN DOS VARIABLES

Desde mediados de los ochenta Mickens ha estado trabajando (siguiendo el procedimiento que Potts (1982) utiliza para construir los esquemas de diferencias finitas exactas para las EDO) en los esquemas de diferencias finitas exactas para las EDP usando la forma general de la solución de la EDP dada. La esencia de esta metodología es fútil puesto que se requiere conocer a priori la solución de la ecuación diferencial. Más aún, no existe la definición genérica de la solución general de una EDP arbitraria. Sus esfuerzos se han enfocado hacia aquella clase de EDP de primer orden en dos variables cuya solución general es conocida. La recopilación de su trabajo inicial se encuentra en Mickens (1994), y el trabajo actual sobre esta metodología lo presenta en Mickens (1999).

Puesto que nuestro interés es la propagación de ondas, hemos construido el esquema de diferencias finitas exactas para la ecuación de onda escalar en dos variable siguiendo la metodología descrita por Mickens (1985). Después, utilizando nuestra metodología en donde se utiliza la expansión de Taylor en conjunto con la ecuación de onda escalar obtenemos el mismo esquema de diferencias finitas exactas y de esta manera construimos una metodología asentada sobre bases firmes. De hecho, todos los resultados obtenidos por Mickens (recolectados en Mickens, 1999) son reproducibles siguiendo nuestra metodología.

IV.1. La ecuación de onda escalar en dos variables

IV.1.1. El esquema de diferencias finitas exactas derivado de la solución general

La ecuación de onda escalar en dos variables es

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (64)$$

la cual tiene una solución de la forma

$$u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (65)$$

donde f y g son funciones arbitrarias. Las dos curvas $x - ct = \text{constante}$ y $x + ct = \text{constante}$ son llamadas características de la ecuación de onda escalar (64). $u(x,t) = f(x - ct)$ representa una onda moviéndose en la dirección positiva de x con velocidad c . Similarmente, $u(x,t) = g(x + ct)$ representa una onda moviéndose en dirección negativa de x . Además, reconocemos a dichas curvas características como los frentes de onda.

Como en el caso de las ecuaciones diferencias ordinarias discreticemos la solución mediante

$$t = n\Delta t \text{ y } x = k\Delta x \text{ donde } k, n = 1, 2, 3, \dots \quad (66)$$

Substituyendo las ecuaciones (66) en la solución (65), tenemos

$$u(k\Delta x, n\Delta t) = f(k\Delta x - cn\Delta t) + g(k\Delta x + cn\Delta t). \quad (67)$$

Denominemos al movimiento del punto k -ésimo al tiempo n -ésimo como

$$u(k\Delta x, n\Delta t) \equiv u_k^n \quad (68)$$

Usando la notación (68) y la ecuación (67), podemos escribir el movimiento del punto k -ésimo al tiempo $(n+1)$ -ésimo como

$$u_k^{n+1} = f(k\Delta x - c(n+1)\Delta t) + g(k\Delta x + c(n+1)\Delta t). \quad (69)$$

Seleccionando

$$c\Delta t = \Delta x \quad (70)$$

los argumentos de las funciones del lado derecho de la ecuación (69) los podemos reescribir como se muestra a continuación,

$$u_k^{n+1} = f((k-1)\Delta x - cn\Delta t) + g((k+1)\Delta x + cn\Delta t). \quad (71)$$

Sumando y restando los términos subrayados en la ecuación (72), tenemos

$$\begin{aligned} u_k^{n+1} = & \overbrace{f((k-1)\Delta x - cn\Delta t)}^1 + \overbrace{g((k+1)\Delta x + cn\Delta t)}^2 \\ & + \overbrace{f((k+1)\Delta x - cn\Delta t)}^3 - \overbrace{f((k+1)\Delta x - cn\Delta t)}^4 \\ & + \overbrace{g((k-1)\Delta x + cn\Delta t)}^5 - \overbrace{g((k-1)\Delta x + cn\Delta t)}^6. \end{aligned} \quad (72)$$

Utilizando la definición genérica (67), reconocemos que el término 1 más el término 5 del lado derecho de la ecuación (72) es u_{k-1}^n , y que el término 2 más el término 3 es u_{k+1}^n .

Utilizando la relación (70) en los términos 4 y 6, vemos que al sumarlos generan el término u_k^{n-1} . Así que, tenemos implícitamente un esquema de diferencias

$$u_k^{n+1} = u_{k+1}^n + u_{k-1}^n - u_k^{n-1}. \quad (73)$$

En seguida, tomemos la expansión de Taylor de los términos de la ecuación (73) alrededor de los puntos sobre la malla $(k\Delta x, n\Delta t)$, para verificar si este esquema de recurrencia nos está representando a la ecuación de onda escalar (64) en el dominio discreto, a la función $u(k\Delta x, n\Delta t)$ la podemos expandir alrededor de $(k\Delta x, (n+1)\Delta t)$ como se muestra en seguida

$$u_k^{n+1} = u_k^n + \Delta t \left(\frac{\partial u^n}{\partial t} \right)_k + \frac{\Delta t^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u^n}{\partial t^2} \right)_k + \frac{\Delta t^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 u^n}{\partial t^3} \right)_k + \frac{\Delta t^4}{4!} \left(\frac{\partial^4 u^n}{\partial t^4} \right)_k + \dots \quad (74)$$

Asimismo tenemos la expansión de $u(k\Delta x, n\Delta t)$ alrededor de $(k\Delta x, (n-1)\Delta t)$,

$$u_k^{n-1} = u_t^n - \Delta t \left(\frac{\partial u^n}{\partial t} \right)_k + \frac{\Delta t^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u^n}{\partial t^2} \right)_k - \frac{\Delta t^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 u^n}{\partial t^3} \right)_k + \frac{\Delta t^4}{4!} \left(\frac{\partial^4 u^n}{\partial t^4} \right)_k - \dots \quad (75)$$

Usando expansiones análogas para u_{k+1}^n , u_{k-1}^n y substituyéndolas en la ecuación (73)

obtenemos la siguiente ecuación algebraica

$$\left(\Delta t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{12} \left(\Delta t^4 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - \Delta x^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) + \frac{1}{360} \left(\Delta t^6 \frac{\partial^6 u}{\partial t^6} - \Delta x^6 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} \right) + \dots = 0 \quad (76)$$

Utilizando en la ecuación (76), la ecuación de onda (64) y las identidades derivadas de la misma

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = c^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \quad \frac{\partial^6 u}{\partial t^6} = c^6 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}, \dots \quad \text{junto con } \Delta x = c\Delta t \quad (77)$$

establecemos la validación de la ecuación, como se indica enseguida

$$\left(c^2 \Delta t^2 - c^2 \Delta t^2\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{12} \left(c^4 \Delta t^4 - c^4 \Delta t^4\right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{1}{360} \left(c^6 \Delta t^6 - c^6 \Delta t^6\right) \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \dots = 0 \quad (78)$$

Por lo que, el esquema de diferencias finitas (73) es efectivamente un esquema exacto para la ecuación de onda escalar (64).

IV.1.2. Derivación del esquema de diferencias finitas exactas utilizando la expansión de Taylor en su entidad completa

Sea $u(x, t)$ una función continua y diferenciable, entonces por la expansión de Taylor tenemos que

$$\begin{aligned} u(x, t + \Delta t) = & u(x, t) + \Delta t \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial t^3} + \frac{\Delta t^4}{4!} \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial t^4} \\ & + \dots + \frac{\Delta t^n}{n!} \frac{\partial^n u(x, t)}{\partial t^n} + \dots \end{aligned} \quad (79)$$

Asimismo, tenemos que

$$\begin{aligned} u(x, t - \Delta t) = & u(x, t) - \Delta t \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\Delta t^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial t^3} + \frac{\Delta t^4}{4!} \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial t^4} \\ & + \dots + (-1)^n \frac{\Delta t^n}{n!} \frac{\partial^n u(x, t)}{\partial t^n} + \dots \end{aligned} \quad (80)$$

Sumando las ecuaciones (79) y (80), tenemos

$$u(x, t + \Delta t) + u(x, t - \Delta t) = 2 \left(u(x, t) + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^4}{4!} \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial t^4} + \frac{\Delta t^6}{6!} \frac{\partial^6 u(x, t)}{\partial t^6} + \dots \right) \quad (81)$$

la cual solamente contiene derivadas de orden par en t . Utilizando la ecuación de onda (64) y las identidades derivadas de la misma

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = c^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \quad \frac{\partial^6 u}{\partial t^6} = c^6 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}, \quad \frac{\partial^8 u}{\partial t^8} = c^8 \frac{\partial^8 u}{\partial x^8}, \dots \quad (82)$$

vemos que las derivadas temporales de la ecuación (81) se han reemplazado por derivadas espaciales, es decir

$$u(x, t + \Delta t) + u(x, t - \Delta t) = 2 \left(u(x, t) + \frac{\Delta t^2}{2!} c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\Delta t^4}{4!} c^4 \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + \frac{\Delta t^6}{6!} c^6 \frac{\partial^6 u(x, t)}{\partial x^6} + \dots \right). \quad (83)$$

Identificando el lado derecho de la ecuación (83) como la suma de la expansión de Taylor de la función $u(x, t)$ alrededor del punto $(x + c\Delta t, t)$ y del punto $(x - c\Delta t, t)$. Tenemos que

$$u(x, t + \Delta t) + u(x, t - \Delta t) = u(x + c\Delta t, t) + u(x - c\Delta t, t) \quad (84)$$

Suponiendo que $\Delta x = c\Delta t$, recobramos el esquema de diferencias finitas exactas (73).

El esquema de diferencias finitas centrado de segundo orden se escribe como

$$u_k^{n+1} + u_k^{n-1} = \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} (u_{k+1}^n + u_{k-1}^n) + 2 \left(1 - \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} \right) u_k^n \quad (85)$$

el cual se usa junto con el criterio de consistencia de Courant-Friedrichs-Lewy, $\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1$.

Obviamente, solamente para $\frac{c\Delta t}{\Delta x} = 1$, el esquema tradicional (85) genera el esquema exacto (73).

V. CONCLUSIONES

La expansión de Taylor es la base para construir esquemas de diferencias. En la metodología tradicional los esquemas de diferencias finitas se construyen utilizando la expansión de Taylor truncada. El procedimiento empleado en esta tesis usa la expansión de Taylor en su entidad completa, además de utilizar las relaciones existentes entre la función y sus derivadas, como lo indica la ecuación diferencial bajo consideración, para expresar todos los términos diferenciales de la expansión de Taylor en términos de la función. De esta manera, se obtiene el esquema de diferencias finitas exactas de forma natural, el cual es independiente del tamaño de paso.

Debemos notar que aunque en este trabajo solamente hemos obtenido esquemas de diferencias finitas exactas ya conocidos, la metodología propuesta en esta tesis origina que nuestro problema se reduzca al manejo de sumas de series infinitas. Actualmente estamos trabajando en la extensión de esta metodología para el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes variables y de la ecuación diferencial parcial con coeficientes constantes en tres variables. Nuestro objetivo final es utilizar esta metodología a la ecuación de onda poroelástica.

Debemos notar que normalmente las mediciones de cualquier proceso físico son un conjunto de puntos discretos, mientras que usualmente las ecuaciones que gobiernan a dicho proceso están definidas en el dominio continuo. Claramente, nosotros estamos

buscando un esquema de diferencias finitas exactas el cual lo podamos considerar como la representación discreta del proceso físico en cuestión. Esta consideración hace de este estudio aún más importante.

REFERENCIAS

- Forsythe, G.W. y Wasow, W.R. 1960. "Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations". John Wiley & Sons, Inc. New York.
- Graves, R.W. 1996. "Simulating Seismic Wave Propagation in 3D Elastic Media Using Staggered-Grid Finite Differences". Bulletin Seismological Society of America. 86: 1091-1106 p.
- Hildebrand, F. B. 1968. "Finite-Difference Equations and Simulations". Prentice Hall Inc. New York. 234-238 p.
- Kelly, K.R. y Marfurt, K.J. 1990. "Numerical Modeling of Seismic Wave Propagation". Society of Exploration Geophysicists. United States of America. Geophysics reprinted series 13.
- Levy, H. y Lessman, F. 1961. "Finite Difference Equations". The Macmillan Company. New York.
- Mickens, R.E. 1985. "Exact Finite Difference Schemes for the Non-Linear Unidirectional Wave Equation". Journal of Sound and Vibration. 100(3):452-455 p.

- Mickens, R.E. 1994. "Nonstandard Finite Difference Models of Differential Equations". World Scientific. Singapore.
- Mickens, R.E. 1999. "An Introduction to Nonstandard Finite Difference Schemes". *Journal of Computational Acoustics*. 7(1): 39-58 p.
- Mitchell, A.R. y Griffiths, D.F. 1980. "The Finite Difference Method in Partial Differential Equations". John Wiley & Sons. Chichester.
- Ozdenvar, T. y McMechan, G.A. 1996. "Causes and Reduction of Numerical Artefacts in Pseudo-Spectral Wavefield Extrapolation". *Geophysical Journal International*. 126(3): 819-828 p.
- Potts, R.B. 1982. "Differential and Difference Equations". *American Mathematical Monthly*. 89(6): 402-407 p.
- Richtmyer, R.D. y Morton, K.W. 1967. "Difference Methods for Initial-Value Problems". John Wiley & Sons. New York.
- Robertson, J.O. 1996. "A numerical Free-Surface Boundary Condition for Including 3D Topography in the Finite Difference Method". *Bulletin Seismological Society of America. Geophysics*. 61: 1921-1934 p.

- Vafidis, A., Abramovici, F. y Kanasevich, E.R. 1992. "Elastic Wave Propagation Using Fully Vectorized High Order Finite-Difference Algorithms". *Geophysics*. 57(2): 218-232 p.
- Wild, A.J. y Singh, S.C. 1998. "Some Unintended Features of Elastic Finite-Difference Models. *Geophysical Prospecting*. 46: 79-101 p.